

# ZAVRŠNI RAD

**Matija Semper**

Zagreb, 2015

# ZAVRŠNI RAD

Voditelj rada:

Doc.dr.sc Danijel Pavković

Student:

Matija Semper

Zagreb, 2015

*Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu*

*Ovom prilikom želio bih se zahvaliti voditelju rada doc.dr.sc Danijelu Pavkoviću na stručnim savjetima i pomoći oko izrade završnog rada.*



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
proizvodno inženjerstvo, računalno inženjerstvo, industrijsko inženjerstvo i menadžment, inženjerstvo  
materijala i mehatronika i robotika

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: **Matija Semper**

Mat. br.: 0035183568

Naslov rada na  
hrvatskom jeziku:

**Sinteza PID regulatora za procese s integracijskim djelovanjem i  
izraženim mrtvim vremenom**

Naslov rada na  
engleskom jeziku:

**PID controller design for processes characterized by integral behavior  
and emphasized dead-time**

Opis zadatka:

U procesnoj tehnici često se susreću dinamički procesi karakterizirani integracijskim djelovanjem čija regulacija može biti otežana zbog postojanja izraženog transportnog kašnjenja (mrtvog vremena) između izvršnog člana (aktuatora) i procesa. U ovom radu potrebno je napraviti sljedeće:

1. Opisati u vremenskom i frekvencijskom području dinamičke značajke modela procesa koji uključuje integracijsko djelovanje i mrtvo vrijeme.
2. Predložiti i analizirati odgovarajuće nadomjesne modele mrtvog vremena zasnovane na:
  - (a) aproksimaciji Taylorovim redom,
  - (b) Padéovoj aproksimaciji,
  - (c) aperiodskom modelu n-tog reda.
3. Aproksimacije mrtvog vremena iz točke 2) primijeniti u sintezi PID regulatora za model procesa s integracijskim djelovanjem, koristeći pritom postupak sinteze prema kriteriju optimuma dvostrukog odnosa.
4. Učinkovitost i robusnost predloženih regulatora treba ispitati simulacijama na računalu, te analitički primjenom metode krivulje mjesta korijena (engl. root locus).

Zadatak zadan:

25. studenog 2014.

Zadatak zadao:

  
Doc. dr. sc. Danijel Pavković

Rok predaje rada:

**1. rok:** 26. veljače 2015.

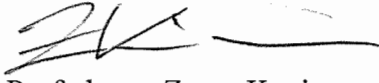
**2. rok:** 17. rujna 2015.

Predviđeni datumi obrane:

**1. rok:** 2., 3., i 4. ožujka 2015.

**2. rok:** 21., 22., i 23. rujna 2015.

Predsjednik Povjerenstva:

  
Prof. dr. sc. Zoran Kunica

## Sadržaj

Sadržaj .....	I
Popis slika .....	III
Popis tablica .....	V
Popis oznaka.....	VI
1    Sažetak .....	1
2    Uvod .....	2
3    Opis regulacijskog kruga.....	3
3.1    Opis PID i PI regulatora .....	3
3.1.1    Digitalni regulator .....	5
3.2    Opis matematičkog modela procesa $G_P(s)$ .....	6
4    Kriterij optimuma dvostrukog odnosa.....	7
5    SInteza PI i PID regulatora.....	9
5.1    Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji prvog reda .....	9
5.2    Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji drugog reda .....	11
5.3    Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji trećeg reda.....	14
5.4    Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda.....	15
5.5    Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom trećeg reda .....	17
5.6    Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji aproksimaciji mrtvog vremena Padeovim članom prvog reda .....	19
6    Rezultati simulacije .....	22
6.1    Aproksimacija mrtvog vremena Taylorovim razvojem.....	23
6.2    Aproksimacija mrtvog vremena aperiodskim članom višeg reda .....	29
6.3    Primjena Padéove aproksimacije mrtvog vremena.....	33
6.4    Utjecaj vremena uzorkovanja $T_s$ .....	35

7	Zaključak .....	37
8	Literatura .....	38
9	Prilozi .....	39

## Popis slika

<i>Slika 1. Upravljački krug .....</i>	<i>3</i>
<i>Slika 2. Regulacijski sustav sa prefiltrom .....</i>	<i>4</i>
<i>Slika 3. Blok diagram upravljačkog kruga sa modificiranim PID regulatorom.....</i>	<i>4</i>
<i>Slika 4. Block diagram diskretnog PID regulatora sa vrijeme diskretiziranja <math>T_s</math> .....</i>	<i>5</i>
<i>Slika 5. Prijelazna funkcija sa raznim karakterističnim odnosima .....</i>	<i>8</i>
<i>Slika 6. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim prvim redom.....</i>	<i>23</i>
<i>Slika 7...Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim prvim redom.....</i>	<i>24</i>
<i>Slika 8. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim drugim redom.....</i>	<i>25</i>
<i>Slika 9. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim drugim redom.....</i>	<i>26</i>
<i>Slika 10. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim trećim redom.....</i>	<i>27</i>
<i>Slika 11. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim trećim redom.....</i>	<i>28</i>
<i>Slika 12. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom drugog reda .....</i>	<i>29</i>
<i>Slika 13. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom drugog reda .....</i>	<i>30</i>
<i>Slika 14. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom trećeg reda.....</i>	<i>31</i>
<i>Slika 15. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom trećeg reda.....</i>	<i>32</i>
<i>Slika 16. Odzivi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimacijom Padéovog prvog reda.....</i>	<i>33</i>
<i>Slika 17. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimacijom Padéovog prvog reda.....</i>	<i>34</i>
<i>Slika 18. Utjecaj vremena uzorkovanja za nadomjesni model zadan aproksimacijom Padéovog prvog reda za PI regulator .....</i>	<i>35</i>



<i>Slika 19. Utjecaj vremena uzorkovanja za nadomjesni model zadan aproksimacijom Padéovog prvog reda za PID regulator .....</i>	<i>36</i>
--	-----------

## Popis tablica

<i>Tablica 1. Zadani podaci .....</i>	<i>9</i>
<i>Tablica 2. Parametri regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji 1. reda.....</i>	<i>11</i>
<i>Tablica 3. Parametri regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji 2. Taylorovog reda .....</i>	<i>14</i>
<i>Tablica 4. Parametri PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na <math>PT_n</math> modelu 2. reda.....</i>	<i>17</i>
<i>Tablica 5. Parametri PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na <math>PT_n</math> modelu 3. reda.....</i>	<i>19</i>
<i>Tablica 6. Parametri PID i PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Padéovog 1. reda.....</i>	<i>21</i>
<i>Tablica 7. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjeni model aproksimiran Taylorovim prvim redom. ....</i>	<i>24</i>
<i>Tablica 8. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjeni model aproksimiran Taylorovim drugim redom. ....</i>	<i>26</i>
<i>Tablica 9. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjeni model aproksimiran aperiodskim članom drugog reda .....</i>	<i>30</i>
<i>Tablica 10. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjeni model aproksimiran aperiodskim članom trećeg reda .....</i>	<i>32</i>
<i>Tablica 11. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjeni model zadan aproksimacijom Padéovog prvog reda. ....</i>	<i>34</i>

**Popis oznaka**

$\zeta$	relativni koeficijent prigušenja
$D_i$	karakteristični odnosi
$G(s)$	prijenosna funkcija
$G_p(s)$	prijenosna funkcija procesa
$G_{pf}(s)$	prijenosna funkcija prefiltra
$G_R(s)$	prijenosna funkcija regulatora
$K_p$	pojačanje procesa
$K_R$	pojačanje regulatora
$T_d$	vremenska konstanta mrtvog vremena
$T_D$	vremenska konstanta derivacijskog djelovanja
$T_e$	ekvivalentna vremenska konstanta
$T_I$	vremenska konstanta integralnog djelovanja
$t_m$	vreme prvog maksimuma odziva
$T_{par}$	parazitno vrijeme
$t_{s2\%}$	vrijeme smirivanja odziva
$T_V$	vrijeme uzorkovanja
$t_x$	omjer vremena uzorkovanja $T_s$ i mrtvog vremena $T_D$

## 1 Sažetak

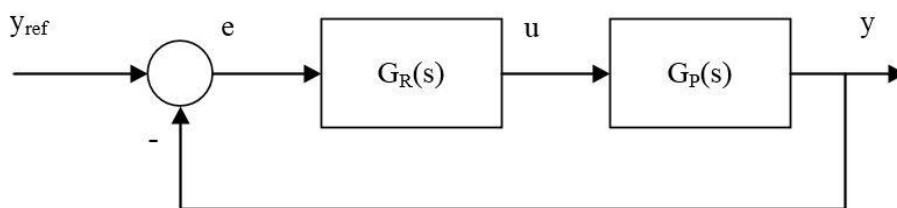
U radu se prikazuje postupak sinteze proporcionalno-integracijskog (PI) i proporcionalno-integracijsko-derivacijskog (PID) regulatora za klasu procesa s integracijskim vladanjem i izraženim mrtvim vremenom (transportnim kašnjenjem). Za potrebe sinteze PI i PID regulatora, eksponencijalni (transcedentni) model mrtvog vremena aproksimira se polinomskim (racionalnim) funkcijama temeljenim na Taylorovom i Padé-ovom razvoju, te aproksimaciji zasnovanoj na aperiodskom modelu  $n$ -toga reda. Sinteza PI i PID regulatora zasniva se na kriteriju optimuma dvostrukog odnosa, a koji rezultira razmjerno jednostavnim algebarskim izrazima za parametre regulatora. Učinkovitost predložene postupka podešavanja regulatora i isporodba kvalitete vladanja regulacijskog kruga za različite izbore aproksimacije mrtvog vremena u postupku sinteze analiziraju se primjenom metode krivulje mjesta korijena i računalnim simulacijama.

## 2 Uvod

Mnogi industrijski procesi kao toplinski sustavi ili sustavi protoka fluida karakterizirani kao spori aperiodski dinamički sa izraženim mrtvim vremenom (transportnim kašnjenjem) uglavnom su modelirani modelom aperiodske dinamike prvog reda sa mrtvim vremenom, a kontrolirani proporcionalno-integracijskim (PI) i proporcionalno-integracijsko-derivacijskim (PID) regulatorima. U ovom radu opisano je optimiranje digitalnog PI i PID regulatora primjenom kriterija optimuma dvostrukog odnosa za slučaj procesa s integracijskim ponašanjem i izraženim mrtvim vremenom. Matematički model dinamičkog člana mrtvog vremena aproksimiran je pomoću Taylorovog i Padéovog reda i aperiodskog modela  $n$ -tog reda. Zbog izraženog mrtvog vremena moguće je otežana regulacija između izvršnog člana (aktuatora) i procesa. Kako bi se ustanovilo da li odabrana aproksimacija mrtvog vremena rezultira kvalitetnim vladanjem regulacijskog kruga, provesti će se usporedna simulacijska analiza za različite postupke odabrane u radu. Korištenje viših redova tih aproksimacija daje nam informaciju je li potrebno daljnje opisivanje matematičkog modela procesa odnosno koji red aproksimacije je dovoljan za opisivanje matematičkog modela procesa. Također će se usporediti iznosi odstupanja simulacijskih rezultata od idealne dinamike regulacijskog kruga prema kriteriju optimuma dvostrukog odnosa. Promatramo i utjecaj vrijeme uzorkovanja  $T_d$  digitalnog regulatora jer u industriji koriste regulacijske uređaje zasnovane na razmjerno jednostavnim mikrokontrolerskim sustavima te u većini slučajeva ti regulatori imaju razmjerno velike iznose vremena uzorkovanja (kako bi mogli istodobno implementirati više regulacijskih petlji.)

### 3 Opis regulacijskog kruga

Regulacijski krug se sastoji od regulatora sa svojom dinamikom  $G_R(s)$ , objekta upravljanja (proces) sa svojim dinamikom  $G_P(s)$  i negativnom povratnom vezom kao što je prikazano na slici 1.. Na ulazu u upravljački krug nalazi se referentna veličina  $y_{ref}$  koju želimo postići na izlazu iz procesa  $y$ . Pogreška  $e$  ulazi u regulator a ona je razlika između referentne veličine  $y_{ref}$  i vrijednosti izlaza iz procesa  $y$ . Ta razlika je negativna povratna veza koja pokušava zadržati procesnu varijablu blizu željene vrijednosti. Na osnovi vrijednosti greske  $e$ , regulator daje vrijednost  $u$  koja ulazi u proces.



Slika 1. Upravljački krug

#### 3.1 Opis PID i PI regulatora

Prijenosna funkcija PID regulatora dana je sljedećim izrazom :

$$G_R(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D}{1 + T_V s} s \right) \quad (1)$$

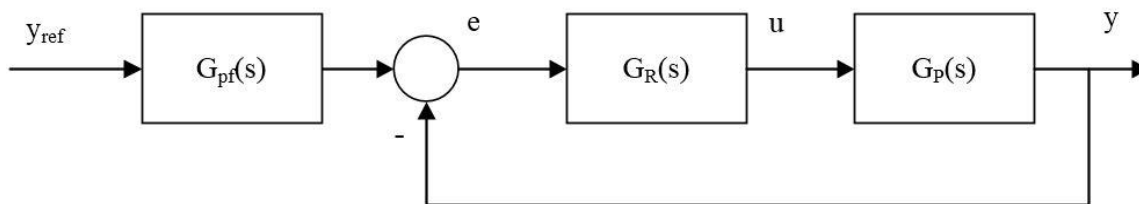
gdje je:  $K_R$  -pojačanje regulatora,

$T_I$  -integracijska vremenska konstanta regulatora,

$T_D$  -derivacijska vremenska konstanta regulatora,

$T_V$  -parazitska vremenska konstanta ( $T_V = T_D/3$  do  $T_D/8$ )

Kod idealnog PID regulatora se zanemaruje parazitska vremenska konstanta  $T_V$ .

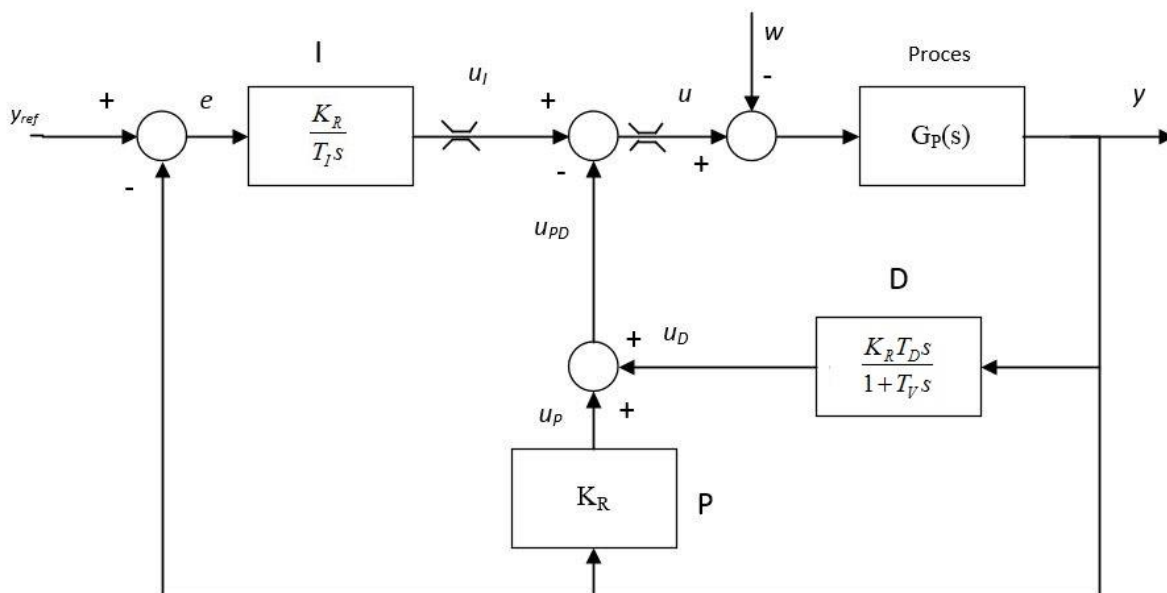


*Slika 2. Regulacijski sustav sa prefiltrom*

Zbog skokovite promjene referente veličine  $y_{ref}$ , signal pogreške će jako forsirati upravljački signal, što često nije poželjno u sustavu regulacije. Da se izbjegne forsiranje izvršnih članova, u granu referente veličine  $y_{ref}$  dodaje se prefiltar, koji krati nule prijenosne funkcije zatvorenog upravljačkog kruga (slika 3.) više o tome u [1].

Ako je prijenosta funkcija zatvorenog upravljačkog kruga zadana funkcijom  $G_c(s) = \frac{B(s)}{N(s)}$ ,

tada prijenosa funkcija predfiltera iznosi  $G_{pf}(s) = \frac{1}{B(s)}$ .



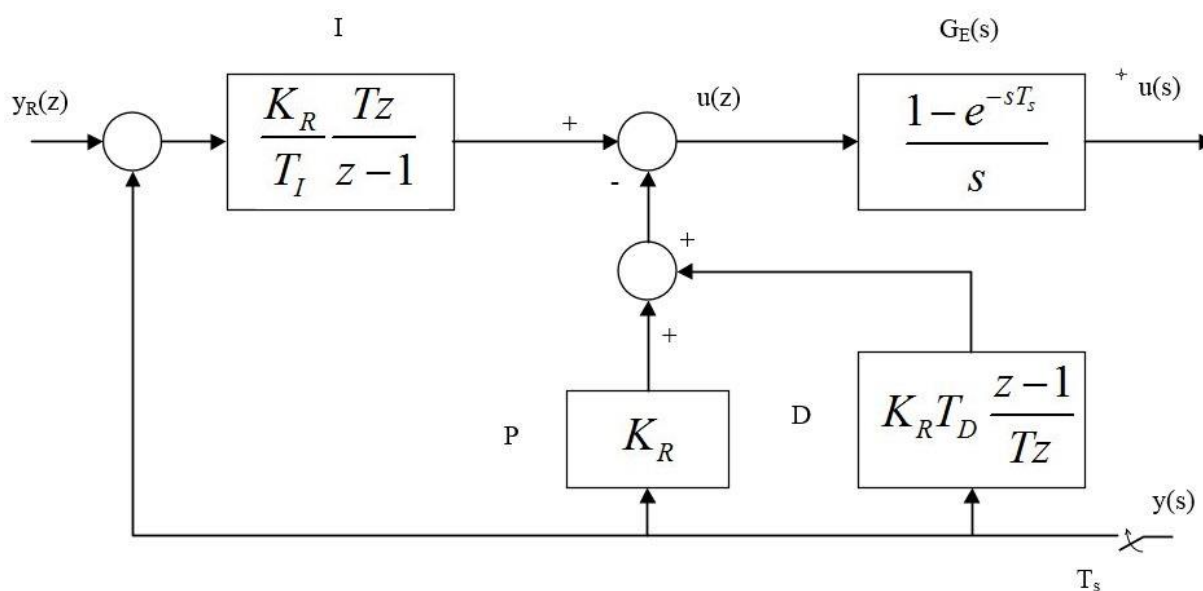
*Slika 3. Blok diagram upravljačkog kruga sa modificiranim PID regulatorom*

U usporedbi sa konvencionalnim PID regulatorom gdje su proporcionalno (P), integralno (I) i derivacijsko (D) djelovanje smješteni na liniji kontrolne greške  $e$ , proporcionalno i derivativno djelovanje djeluju na mjerenu izlaznu veličinu  $y$ , kao što je na slici 2. Za izbjegavanje velikih skokova odziva u režimu velikih signala, na izlazu iz regulatora postoje limiteri koji nedopuštaju da izlazna veličina  $u$  prelazi neku granicu [2]. Ovakva struktura se često koristi kod diskretnih PID regulatora.

Razlika između PI i PID regulatora je ta da PI regulator nema derivacijsko (D) odnosno derivacijska vremenska konstanta  $T_D$  je jednaka nuli. Prema tome PI regulator bi trebao davat nešto sporije odzive.

### 3.1.1 Digitalni regulator

Za potrebe implementacije regulatora unutar digitalnog računala potrebno je dinamiku regulatora iz kontinuiranog područja prikazati u diskretnom  $z$  području ali treba uzeti u obzir vrijeme diskretiziranja signala pri projektiranju regulatora. Regulator sa slike 3. prikazan u osnovnom diskretnom obliku kao što je na slici 4. Implementacija digitalnih regulacijskih krugova za PI i PID regulatora izvršena je u programskom paketu Matlab/Simulink.



Slika 4. Blok diagram diskretnog PID regulatora sa vrijeme diskretiziranja  $T_s$



Odabir vremena uzorkovanja  $T_s$  (gdje je moguće) uzima u obzir mrtvo vrijeme procesa  $T_d$  i konstanta kašnjenja  $T_a$  na skokovitu promjenu odziva kao što slijedi :

$$T_s \approx \begin{cases} (0.35-1.2)T_d, & 0.1 \leq T_d / T_a \leq 1, \\ (0.22-0.35)T_d, & 1 \leq T_d / T_a \leq 10, \end{cases} \quad (2)$$

U slučaju komercijalnih PID kontrolera , ili PLC kontroler sa pripadajućim sensorima, vrijeme uzorkovanja može biti predodređen sa strane brzine hardwera.

Izlaz diskretiziranog PID regulatora se može prikazati u kontinuirano područje uzevši adekvatno u obzir vrijeme uzorkovanja  $T_s$ . Više o ovome u literaturi [2].

Zbog malog iznosa parazitnog vremena  $T_v$  , on se pridodaje mrtvom vremenu  $T_d$  te za PI regulator iznosi:  $T_{v\_PI} = T_s / 2$  , a za PID regulator :  $T_{v\_PID} = T_s$

### 3.2 Opis matematičkog modela procesa $G_P(s)$

Za aproksimaciju člana s mrtvim vremenom koristimo sljedeća tri nadomjesna modela :

1. Aproksimacija pomoću razvoja u Taylorov red

$$G_{Taylor}(s) = \frac{1}{1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6} \dots} ; \quad (3)$$

2. Padéovom aproksimacijom:

$$G_{Padé}(s) = \frac{1 - \frac{T_d}{2}s + \frac{T_d^2 s^2}{12} s - \dots}{1 + \frac{T_d}{2}s + \frac{T_d^2 s^2}{12} s + \dots} ; \quad (4)$$

3. Aproksimacijom aperiodskim modelom n-tog reda

$$G_n(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{T_d}{n}\right)^n} \quad (5)$$

## 4 Kriterij optimuma dvostrukog odnosa

Analitički postupak kriterij optimuma dvostrukog odnosa određuje odnose između koeficijenata karakterističnog polinoma linearnog sustava proizvoljnog reda  $n$ . Prigušenje odziva odgovara faktoru prigušenja  $\zeta = 0.707$ . Sa takvim faktorom prigušenja smatra se optimalnim u mnogim područjima regulacijske tehnike. Kod oscilatornog člana drugog reda gdje veza između pokazatelja i vladanja u vremenskoj domeni položaja polova i nula u kompleksnom području egzaktna, sustava višeg reda ( $n > 2$ ) to nije [2]. Koristeći kriterij optimum dvostrukog odnosa može se odrediti optimalan odziv sustava u odnosu na prijenosnu funkciju zatvorenog kruga regulacije. Prijenosna funkcija zatvorenog sustava prema optimumu dvostrukog odnosa je :

$$G_{odo}(s) = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{1 + T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + \dots + D_{n-1} D_{n-2} \dots D_2 T_e^{n-1} s^n} \quad (6)$$

Gdje je :

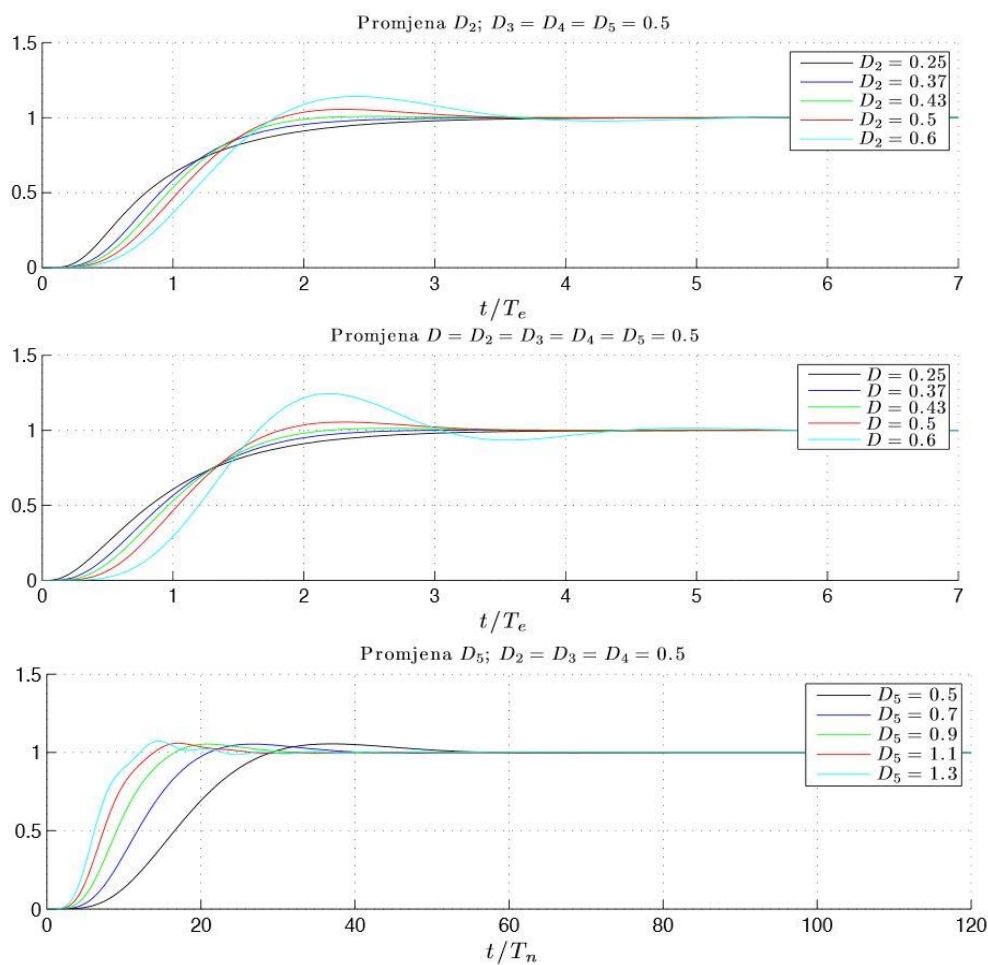
$n$  -red prijenose funkcije zatvorenog sustava

$T_e$  -ekvivalentna vremenska konstanta

$D_i$  -karakteristični odnosi ( $i=2,3,\dots,n$ )

Optimalno podešavanje regulacijskog sustava postiže se kada su svi karakteristični odnosi polima jednaki 0,5 ( $D_2=D_3=\dots=D_n=0.5$ ). U takvom slučaju regulacijski sustav  $n$ -tog reda je karakteriziran nadvišenjem od 6% na skokovitu promjenu referente veličine i vremenom odziva (od 0 do 100% stacionarne vrijednosti)  $t_r \approx 1,8 T_e$ . Povećavanjem ekvivalente vremenske konstante  $T_e$  povećava se robusnost regulacijskog sustava na pogreške modeliranja i smanjuje se njegova osjetljivost na šumove, što prouzročuje sporijim odzivom i manje učinkovitijim potiskivanjem utjecaja na poremećajnih veličina (npr. moment tereta). U slučaju da se razmatra regulator reduciranog reda  $r$  ( $n < r$ ) samo se dominantni karakteristični odnosi  $D_2, \dots, D_r$  postavljaju na optimalni iznos [3].

Ponekad je potrebno odstupiti od optimalnog prigušenja sustava određenog optimalnim karakterističnih odnosa. Za taj slučaj potrebno je napraviti usporednu analizu sa tzv. optimalnim slučajem ( $D_2=D_3=\dots=D_n=0.5$ ) kako bi se ustanovilo kako pod optimalan izbor karakterističnih odnosa utječe na kvalitetu odziva [3].



Slika 5. Prijelazna funkcija sa raznim karakterističnim odnosima

Sa smanjivanjem najdominantnijeg karakterističnog odnosa  $D_2$  povećava se prigušenje prijelazne funkcije odnosno smanjuje se nadvišenje i oscilatornost. Kod  $D_2=0,37$  postiže se granični aperiodski odziv, odnosno nema nadvišenja odziva na referentnu veličinu [3]. Daljnjim smanjivanjem  $D_2$  nema smisla jer samo usporava odziv. Nasuprot tome, povećavanjem  $D_2$  smanjuje se prigušenje te povećava nadvišenje i oscilatornost. Slično je za slučaj kada mijenjamo sve karakteristične odnose  $D_i$ .

## 5 Sinteza PI i PID regulatora

Za sve sinteze regulatora za različite nadomjesne modele procese uzimamo pretpostavku da se radi o idealnom PID regulatoru ( $T_v=0$ ). Iznosi vrijeme uzorkovanja  $T_s$ , pojačanja procesa  $K_p$  i izraženog transportnog kašnjenja  $T_d$  dani su u tablici 1.

Tablica 1. Zadani podaci

$T_s$	1 s
$T_d$	10 s
$K_p$	1 s <sup>-1</sup>

### 5.1 Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji prvog reda

Prijenosna funkcija člana s mrtvim vremenom zasnovana na Taylorovoj aproksimaciji prvog reda :

$$G_{Taylor\_1}(s) = \frac{1}{1 + T_d s} \quad (7)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom :

$$G_p(s) = K_p \frac{1}{(1 + T_d s)s} \quad (8)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga :

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1}{(1 + T_d s)s} = K_R K_p \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I (1 + T_d s)s^2} \quad (9)$$

Što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga :

$$\begin{aligned}
G_C(s) &= \frac{G_o(s)}{1+G_o(s)} = K_R K_p \frac{1+T_I s+T_I T_D s^2}{T_I (1+T_d s)s^2 + K_R K_p (1+T_I s+T_I T_D s^2)} = \\
&= \frac{1+T_I s+T_I T_D s^2}{1+T_I s+T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3} = \frac{B(s)}{N(s)}
\end{aligned} \tag{10}$$

Kao što smo prije napomenuli u 2.1 primjenom prefiltra  $\frac{1}{1+T_I s+T_I T_D s^2}$  u grani referentne vrijednosti sustav sa PI(D) regulatorom u direktnoj izvedbi svodi se na sustav s PI(D) regulatorom u modificiranoj strukturi [2]. Kraćenjem nula regulatora u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga dobije se prijenosna funkcija procesa koja se može izravno usporediti sa prototipskom prijenosnom funkcijom prema kriteriju optimuma dvostrukog odnosa.

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog sustava  $N(s)$  izjednačavamo sa optimom dvostrukog odnosa:

$$1+T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + D_2^2 D_3 T_e^3 s^3 = 1+T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 \tag{11}$$

čime se dobije sljedeći sustav algebarskih jednadžbi iz kojih se izvode analitički izrazi za parametre regulatora :

$$\begin{aligned}
T_e &= T_I \\
D_2 T_e^2 &= T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) \\
D_2^2 D_3 T_e^3 &= \frac{T_I T_d}{K_R K_p}
\end{aligned} \tag{12}$$

Iznosi parametara PI regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim 1. redom uzimajući u obzir da derivacijska vremenska konstanta je jednaka nuli ( $T_D=0$ ):

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{T_d}{D_3 D_2} \\
T_I &= T_e \\
K_R &= \frac{1}{D_2 K_p T_e}
\end{aligned} \tag{13}$$

Za PID regulator se proizvoljno izabere ekvivalentna vremenska konstanta  $T_e$  zato jer se javlja singularnost sustava ( $n < r$ ). Model procesa je 2. Reda ( $n=2$ ) dok je PID regulator 3. reda. Za proizvoljno odabranu ekvivalentu vremensku konstantu označiti ćemo sa  $T_e^*$ . Iznosi parametra za PID regulator :

$$\begin{aligned} T_I &= T_e^* \\ K_R &= \frac{T_d}{D_2^2 D_3 K_P T_e^{*2}} \\ T_D &= D_2 T_e^* \frac{1}{K_R K_P} \end{aligned} \quad (14)$$

Vrijednost ekvivalentne vremenske konstante  $T_e^*$  postepeno je smanjivana do te vrijednosti dok odziv sustava ne postaje izobličen.

*Tablica 2. Parametri regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji 1. reda*

	PI	PID
$T_e$	42	34*
$T_I$	42	34
$T_D$	0	38.636
$K_R$	0.04762	0.07612
$D_2$	0.5	0.5
$D_3$	0.5	0.5

## 5.2 Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji drugog reda

Prijenosna funkcija člana s mrtvim vremenom zasnovana na Taylorovoj aproksimaciji drugog reda :

$$G_{Taylor\_2} = \frac{1}{1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}} \quad (15)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom :

$$G_p = K_p \frac{1}{\left(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}\right)s} \quad (16)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga :

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1}{\left(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}\right)s} = K_R K_p \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I \left(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}\right)s^2} \quad (17)$$

Što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga :

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = K_R K_p \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I \left(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2}\right)s^2 + K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2)} = \\ &= \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{1 + T_I s + T_I \left(\frac{1}{K_R K_p} + T_D\right)s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{2 K_R K_p} s^4} = \frac{B(s)}{N(s)} \end{aligned} \quad (18)$$

Razlika prijenosne funkcije između (10) i (18) je u tome što se u nazivniku javlja dodatan član zbog dodatnog opisivanja procesa modela .

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog sustava  $N(s)$  izjednačavamo sa optimom dvostrukog odnosa:

$$1 + T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + D_2^2 D_3 T_e^3 s^3 + D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 s^4 = 1 + T_I s + T_I \left(\frac{1}{K_R K_p} + T_D\right)s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{2 K_R K_p} s^4 \quad (19)$$

čime se dobije sljedeći sustav algebarskih jednadžbi iz kojih se izvode analitički izrazi za parametre regulatora :

$$\begin{aligned}
T_e &= T_I \\
D_2 T_e^2 &= T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) \\
D_2^2 D_3 T_e^3 &= \frac{T_I T_d}{K_R K_p} \\
D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 &= \frac{T_I T_d^2}{2 K_R K_p}
\end{aligned} \tag{20}$$

PI regulator ( $r=2$ ) može samo proizvoljno izabirati karakteristične odnose  $D_2$  i  $D_3$ . Stoga analitički izrazi za PID regulator proporcionalno djelovanje  $K_R$ , vrijeme integralnog djelovanja  $T_I$  su dobiveni izjednačavanjem nižih redova koeficijenata karakterističnog polinoma u (18) sa koeficijenta karakterističnih polinoma u (19) sve do  $s^3$ . Iako sustav (18) je trećeg reda, usporedba prva 3 koeficijenta je dovoljna za proračun parametara regulatora odnosno iznosi parametara za PI regulator su isti kao i u (13).

Iznosi parametara PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim 2. redom :

$$\begin{aligned}
T_e &= \frac{T_d}{2D_2 D_3 D_4} \\
T_I &= T_e \\
K_R &= \frac{T_d}{K_p D_2^2 D_3 T_e^2} \\
T_D &= D_2 T_e - \frac{1}{K_R K_p}
\end{aligned} \tag{21}$$

U ovom slučaju ako je karakteristični odnos  $D_4=0.5$ , tada dobivamo da vremenska derivacijska konstanta  $T_D=0$  odnosno PI regulator. Postavljanje karakterističnog odnosa na  $D_4=0.7$  utvrđeno je da tada daje najbolji odziv.

Dobiveni iznosi parametara regulatora PI i PID:



*Tablica 3. Parametri regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji 2. Taylorovog reda*

	PI	PID
$T_e$	42	31.42
$T_I$	42	31.42
$K_R$	0.04762	0.0891
$D_2$	0.5	0.5
$D_3$	0.5	0.5
$D_4$	-/-	0.7
$T_D$	-/-	4.49

### 5.3 Nadomjesni model procesa zasnovan na Taylorovoj aproksimaciji trećeg reda

Prijenosna funkcija člana s mrtvim vremenom zasnovana na Taylorovoj aproksimaciji prvog reda :

$$G_{Taylor\_3}(s) = \frac{1}{1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6}} \quad (22)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom :

$$G_P(s) = K_p \frac{1}{(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6})s} \quad (23)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga :

$$\begin{aligned} G_O(s) &= K_R \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1}{(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6})s} = \\ &= K_R K_p \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I (1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6})s^2} \end{aligned} \quad (24)$$

Što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga :

$$\begin{aligned}
G_C(s) &= \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = K_R K_p \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{T_I (1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{2} + \frac{T_d^3 s^3}{6}) s^2 + K_R K_p (1+T_I s + T_I T_D s^2)} = \\
&= \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{1+T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{2 K_R K_p} s^4 + \frac{T_I T_d^3}{6 K_R K_p} s^5} \quad (25)
\end{aligned}$$

Ovaj sustav 5. reda je višeg reda te za njega PI i PID regulator nemogu podesiti najviše karakteristične odnose. Stoga daljnim aproksimacijama viših redova odnosno kompleksnijim opisivanjem procesa ne postiže se kvalitetnija slika dinamičnog vladanja zatvorenog regulacijskog sustava [3]. Naime, za zatvoreni krug zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena Taylorovim razvojem trećeg reda, dobiju se identični izrazi za podešavanje parametara regulatora kao i u prethodnom slučaju aproksimacije Taylorovim razvojem drugog reda, odnosno parametri PI i PID regulatora su isti kao i u tablici 3.

#### 5.4 Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda

Prijenosna funkcija aperiodskog člana drugog reda (6) kojim se aproksimira član s mrtvim vremenom:

$$G_{PT_2}(s) = \frac{1}{1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{4}} \quad (26)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom, prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom:

$$G_P(s) = K_p \frac{1}{(1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{4})s} \quad (27)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_O(s) = K_R \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1}{(1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{4})s} = K_R K_p \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{T_I (1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{4})s^2} \quad (28)$$

što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga:

$$\begin{aligned}
 G_C(s) &= \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = K_R K_p \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{T_I (1+T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{4}) s^2 + K_R K_p (1+T_I s + T_I T_D s^2)} = \\
 &= \frac{1+T_I s + T_I T_D s^2}{1+T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{4 K_R K_p} s^4} \quad (29)
 \end{aligned}$$

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog sustava  $N(s)$  izjednačavamo sa optimom dvostrukog odnosa:

$$1+T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + D_2^2 D_3 T_e^3 s^3 + D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 s^4 = 1+T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{4 K_R K_p} s^4 \quad (30)$$

Izjednačavanjem lijeve i desne strane gore navedenog izraza dobije se sustav algebarskih jednadžbu kako je dano ispod:

$$\begin{aligned}
 T_e &= T_I \\
 D_2 T_e^2 &= T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) \\
 D_2^2 D_3 T_e^3 &= \frac{T_I T_d}{K_R K_p} \\
 D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 &= \frac{T_I T_d^2}{4 K_R K_p} \quad (31)
 \end{aligned}$$

Iznosi parametara PID regulatora za nadomjesni model temeljen na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda glase:

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{T_d}{4 D_2 D_3 D_4} \\
 T_I &= T_e \\
 K_R &= \frac{T_d}{K_p D_2^2 D_3 T_e^2} \\
 T_D &= D_2 T_e - \frac{1}{K_R K_p} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Treba uočiti ta ekvivalentna vremenska konstanta  $T_e$  (ukoliko su svi karakteristikni odnosi su  $D_i=0.5$ ) da će biti puno manja (dvostruko i više) nego u poglavlju 4.2. Shodno tome , radi

postizanja robusnijeg vladanja regulacijskog kruga u uvjetima značajnijeg odstupanja aproksimacije mrtvog vremen aperiodskim članom drugog reda, karakteristični odnos  $D_4$  će možda trebati smanjiti ispod optimalnog iznosa (0.5) [4]. Više o tome u poglavlju 5.

Iznosi parametara za PI regulator su isti kao i u tablici 3. Dok za PID regulator se nalaze u tablici 4.

*Tablica 4. Parametri PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan  $PT_n$  modelu 2. reda*

PID	
$T_e$	33.33
$T_I$	33.33
$K_R$	0.0792
$D_2$	0.5
$D_3$	0.5
$D_4$	0.33
$T_D$	4.04

## 5.5 Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom trećeg reda

Prijenosna funkcija aperiodskog člana trećeg reda (6) kojim se aproksimira član s mrtvim vremenom:

$$G_{PT_3}(s) = \frac{1}{1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{3} + \frac{T_d^3 s^3}{9}} \quad (33)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom, prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom:

$$G_p(s) = K_p \frac{1}{(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{3} + \frac{T_d^3 s^3}{9})s} \quad (34)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_O(s) = K_R \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1}{(1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{3} + \frac{T_d^3 s^3}{9})s} = \frac{K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2)}{T_I (1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{3} + \frac{T_d^3 s^3}{9})s^2} \quad (35)$$

što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga:

$$\begin{aligned} G_C(s) &= \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} = \frac{K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2)}{T_I (1 + T_d s + \frac{T_d^2 s^2}{3} + \frac{T_d^3 s^3}{9})s^2 + K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2)} = \\ &= \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{1 + T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{3 K_R K_p} s^4 + \frac{T_I T_d^3}{9 K_R K_p} s^5} \end{aligned} \quad (36)$$

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog sustava  $N(s)$  izjednačavamo sa optimom dvostrukog odnosa:

$$1 + T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + D_2^2 D_3 T_e^3 s^3 + D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 s^4 = 1 + T_I s + T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) s^2 + \frac{T_I T_d}{K_R K_p} s^3 + \frac{T_I T_d^2}{3 K_R K_p} s^4 \quad (37)$$

odakle se dobije sljedeći sustav algebarskih jednačbi iz kojih se izvede analitički izrazi za parametre regulatora:

$$\begin{aligned} T_e &= T_I \\ D_2 T_e^2 &= T_I \left( \frac{1}{K_R K_p} + T_D \right) \\ D_2^2 D_3 T_e^3 &= \frac{T_I T_d}{K_R K_p} \\ D_2^3 D_3^2 D_4 T_e^4 &= \frac{T_I T_d^2}{3 K_R K_p} \end{aligned} \quad (38)$$

Iznosi parametara PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran  $PT_n$  3. reda :

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{T_d}{3 D_2 D_3 D_4} \\ T_I &= T_e \\ K_R &= \frac{T_d}{K_p D_2^2 D_3 T_e^2} \\ T_D &= D_2 T_e - \frac{1}{K_R K_p} \end{aligned}$$

*Tablica 5. Parametri PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na  $PT_n$  modelu 3. reda*

PID	
$T_e$	31.8
$T_I$	31.8
$T_D$	4.389
$K_R$	0.0865
$D_2$	0.5
$D_3$	0.5
$D_4$	0.46

Iznosi parametara za PI regulator su isti kao i u tablici 3.

### 5.6 Nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji aproksimaciji mrtvog vremena Padeovim članom prvog reda

Prijenosna funkcija Padeovog člana prvog reda (5) kojim se aproksimira član s mrtvim vremenom:

$$G_{Pade\_1}(s) = \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{1 + \frac{T_d}{2}s} \quad (39)$$

Uzimajući gore navedenu aproksimaciju člana s mrtvim vremenom, prijenosna funkcija modela procesa dana je sljedećim izrazom:

$$G_p(s) = K_p \frac{1 - \frac{T_d}{2}s}{(1 + \frac{T_d}{2}s)s} \quad (40)$$

Na temelju prijenosne funkcije PI(D) regulatora (1) i prethodno definirane aproksimacije modela procesa dobije se sljedeća prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga:

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s} K_p \frac{1 - \frac{T_d}{2} s}{(1 + \frac{T_d}{2} s)s} = \frac{K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2) \left(1 - \frac{T_d}{2} s\right)}{T_I (1 + \frac{T_d}{2} s) s^2} \quad (41)$$

što konačno rezultira sljedećom prijenosnom funkcijom zatvorenog regulacijskog kruga:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2) \left(1 - \frac{T_d}{2} s\right)}{T_I (1 + \frac{T_d}{2} s) s^2 + K_R K_p (1 + T_I s + T_I T_D s^2) \left(1 - \frac{T_d}{2} s\right)} = \\ &= \frac{(1 + T_I s + T_I T_D s^2) \left(1 - \frac{T_d}{2} s\right)}{1 + \left(T_I - \frac{T_d}{2}\right) s + T_I \left(\frac{1}{K_R K_p} + T_D - \frac{T_d}{2}\right) s^2 + T_I T_d \left(\frac{1}{2K_R K_p} - T_D\right) s^3} \end{aligned} \quad (42)$$

Nazivnik prijenosne funkcije zatvorenog sustava  $N(s)$  izjednačavamo sa optimom dvostrukog odnosa:

$$1 + T_e s + D_2 T_e^2 s^2 + D_2^2 D_3 T_e^3 s^3 = 1 + \left(T_I - \frac{T_d}{2}\right) s + T_I \left(\frac{1}{K_R K_p} + T_D - \frac{T_d}{2}\right) s^2 + T_I T_d \left(\frac{1}{2K_R K_p} - T_D\right) s^3 \quad (43)$$

što rezultira sljedećim sustavom algebarskih jednadžbi temeljem kojih se izводе izrazi za parametre regulatora:

$$\begin{aligned} T_e &= T_I - \frac{T_d}{2} \\ D_2 T_e^2 &= T_I \left(\frac{1}{K_R K_p} + T_D - \frac{T_d}{2}\right) \\ D_2^2 D_3 T_e^3 &= T_I T_d \left(\frac{1}{2K_R K_p} - T_D\right) \end{aligned} \quad (44)$$

Za PI regulator vremenska derivacijska konstanta je jednaka nuli te ekvivalentna vremenska konstanta  $T_e$  je dana izrazom (45).

$$D_2^2 D_3 T_e^3 - \frac{1}{2} D_2 T_d T_e^2 - \frac{1}{2} T_d^2 T_e - \frac{1}{8} T_d^3 = 0 \quad (45)$$

Ostali parametri PI regulatora određeni su izrazima :

$$T_I = T_e + \frac{T_d}{2}$$

$$K_R = \frac{1}{K_P} \frac{T_I}{D_2 T_e^2 + \frac{T_d T_e}{2} + \frac{T_d^2}{4}} \quad (46)$$

Za implementaciju PID regulatora treba proizvoljno odabrati ekvivalentnu vremensku konstantu zato jer se javlja isingularnost sustava. Izrazi za parametre PID regulatora :

$$T_I = T_e + \frac{T_d}{2}$$

$$K_R = \frac{3}{2} \frac{1}{K_P} \frac{1}{\frac{D_2^2 D_3 T_e^3}{T_I T_d} + \frac{D_2 T_e^2}{T_I} + \frac{T_d}{2}} \quad (47)$$

$$T_D = \frac{D_2 T_e^2}{T_I} + \frac{T_d}{2} - \frac{1}{K_R K_P}$$

Iznosi parametara PI i PID regulatora dane su u tablici 6.

*Tablica 6 Parametri PID i PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Padéovog 1. reda*

	PI	PID
$T_e$	34	25*
$T_I$	39.25	30.5
$K_R$	0.05	0.06954
$D_2$	0.5	0.5
$D_3$	0.5	0.5
$D_4$	-/-	0.5
$T_D$	-/-	1.3676



## 6 Rezultati simulacije

U ovome poglavlju će biti prikazani odzivi PI i PID regulatora za sve nadomjesne modele procesa sa izraženim mrtvim vremenom i integracijskim djelovanjem. Analiza vladanja regulacijskih sustava sa PI i PID regulatorom provodi se računalnim simulacijama u programskom paketu Simulink, te kroz analizu krivulje mjesta korijena (root-locus) u Matlabu. Potonja analiza provodi se za regulacijske krugove opremljene PI i PID regulatorima pri čemu se koriste aproksimacije u obliku razvoja Taylorov red, aperiodskog člana višeg reda, te Padé-ove aproksimacije.

Radi potpunijeg uvida u kvalitetu vladanja regulacijskih krugova, odzivi su karakterizirani :

$t_r$  - vremenom porasta (0-100%)

$\sigma_m$  - iznos nadvišenja (prebačaja)

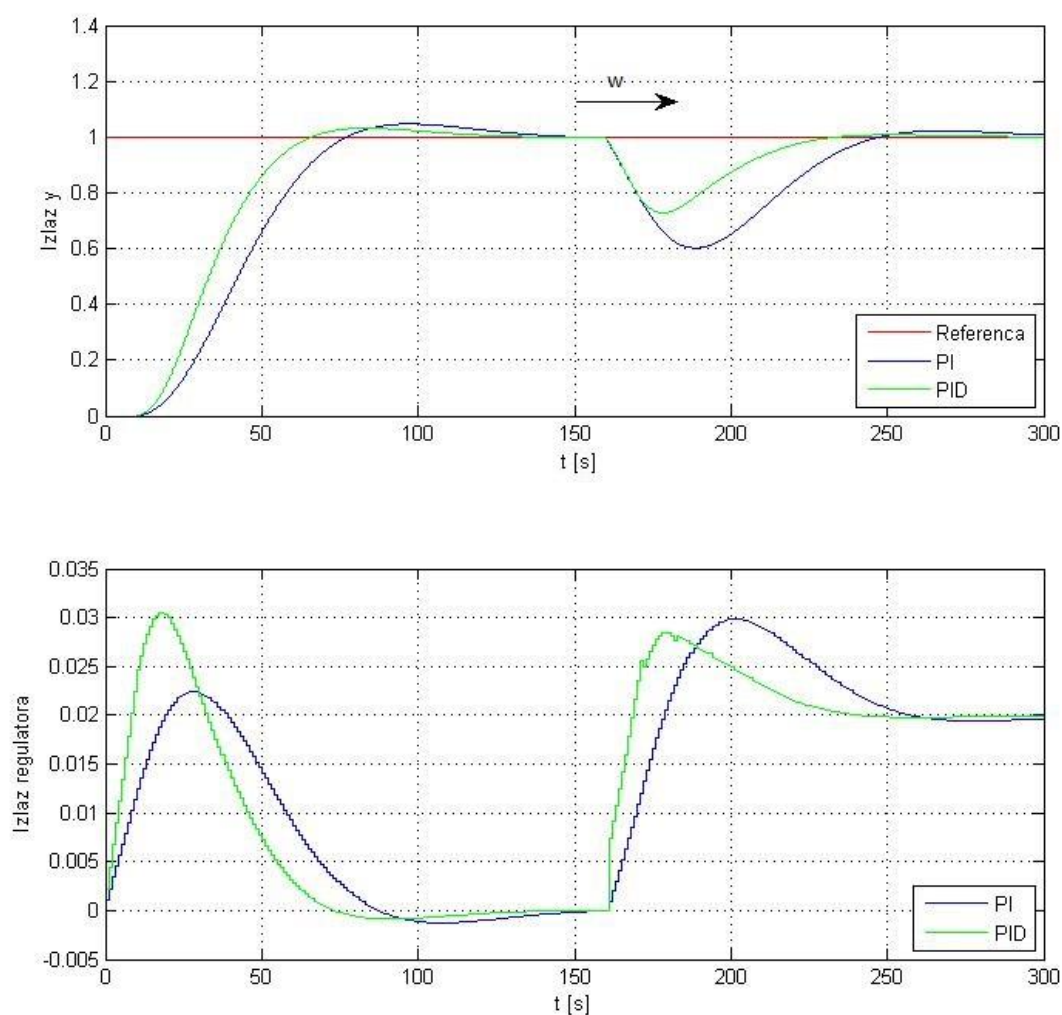
$t_{s2\%}$  - vrijeme smirivanja odziva

$t_m$  - vrijeme prvog maksimuma

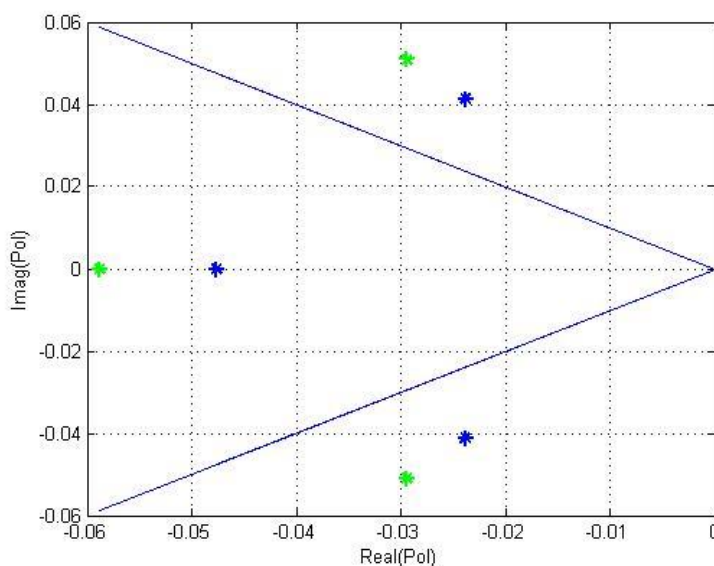
Te karakteristike standardno se koriste pri opisivanju vladanja dinamičkih sustava u vremenskom području.

## 6.1 Aproximacija mrtvog vremena Taylorovim razvojem

Na slici 6. Prikazani su usporedni odzivi PI i PID regulatora za slučaj podešavanja primjenom aproksimacije mrtvog vremena pomoću prva dva člana Taylorovog razvoja ( Taylorova aproksimacija prvog reda). Prema očekivanjima , PID regulator kao regulator s više stupnjeva slobode daje zamjetno brži odziv uz nešto manji iznos nadvišenja u odnosu na PI regulator.



Slika 6. Odzivi PI i PID regulatora podešene uz aproksimaciju mrtvog vremena Taylorovim razvojem prvog reda

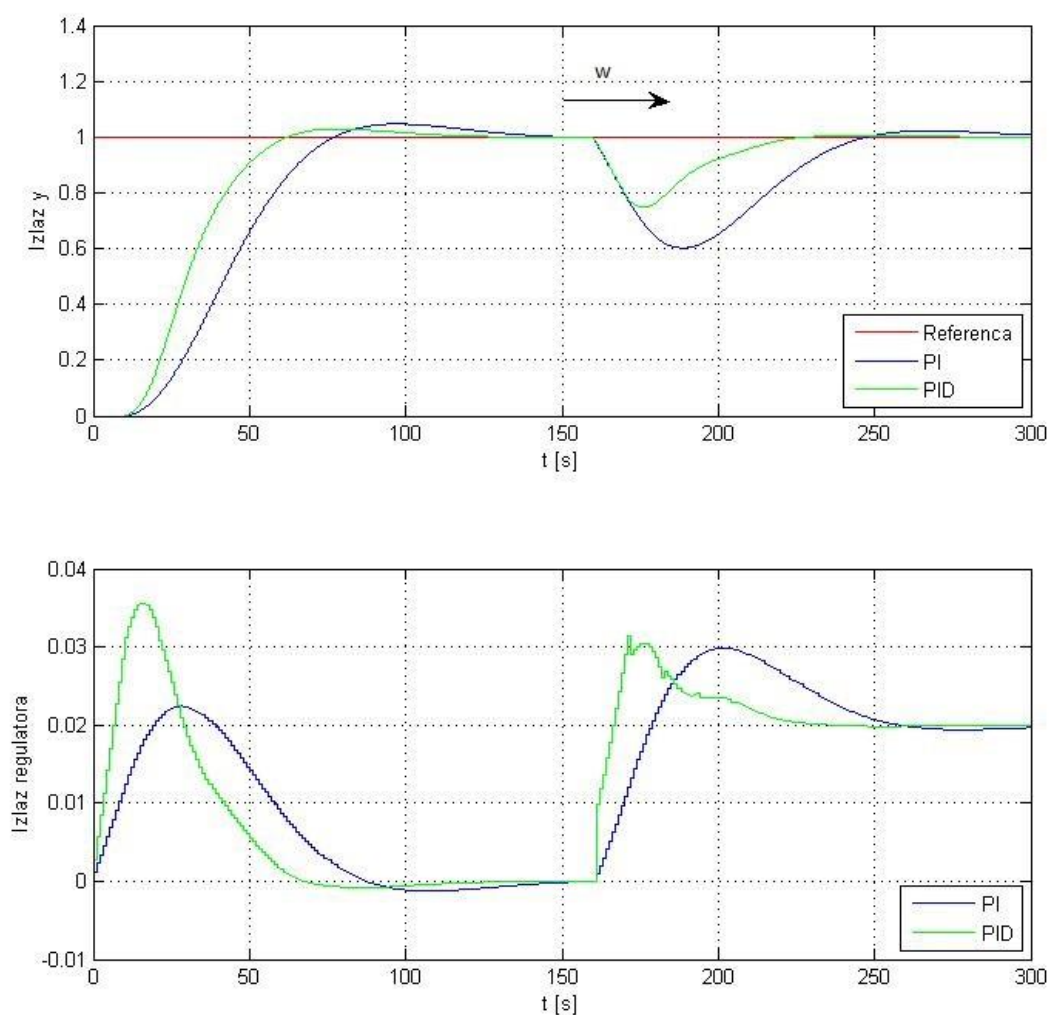


*Slika 7. Polovi PI i PID regulatora podešene uz aproksimaciju mrtvog vremena Taylorovim razvojem prvog reda*

Sa slike 6. vidimo da PI i PID sa karakterističnim odnosima  $D_i$  postavljeni na iznos od 0.5 daju dobro prigušen odziv sa malim nadvišenjem. Isto tako odziv koji daje PID regulator je brži od odziva koji daje PI regulator te PID regulator brže reagira na udarni (skokoviti) poremećaj u usporedbi s PI regulatorom zbog postojanja derivacijskog djelovanja, a koje omogućuje i manji iznos ekvivalentne vremenske konstante  $T_e$  zatvorenog regulacijskog kruga. Na slici 7. vidimo položaje polova zatvorenog regulacijskog sustava koji su razmjerno dobro prigušeni: dva konjugirano-kompleksna pola čiji je faktor prigušenja blizu „optimalnom“ iznosu 0.707 (pravci nagiba  $45^\circ$  kao na slici 7), te jedan razmjerno brzi realni pol. U tablici 7 su dane su karakteristike odziva te vidimo da PID regulator karakteriziran približno 16% bržim odzivom (usporedba vremena odziva  $t_r$  i za trećinu nižim iznosom nadvišenja).

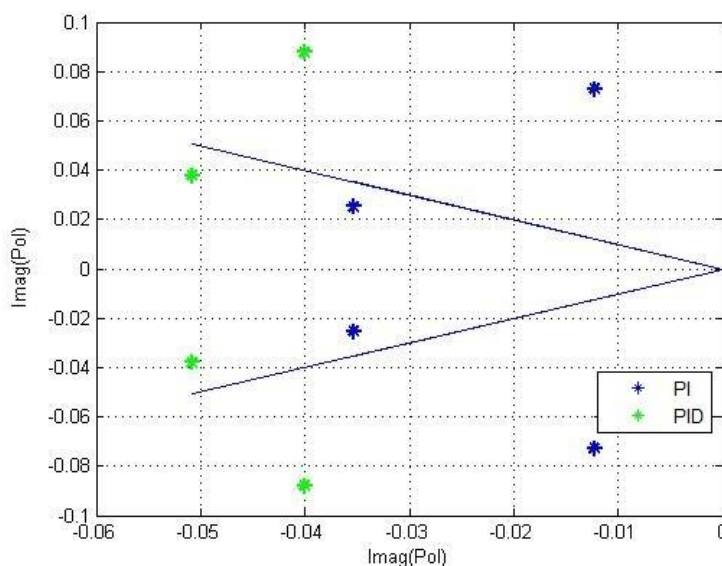
*Tablica 7. Pokazatelj kvalitete odziva regulacijskih sustava s PI i PID regulatorom podešeni temeljem aproksimacije mrtvog vremena Taylorovim razvojem prvog reda*

	PI	PID
$t_s$	74.2 s	62.4 s
$t_r$	77.4 s	66.2 s
$\sigma_n$	4.67%	3.15%
$t_{\max}$	97.9 s	83.1 s



*Slika 8. Odzivi PI i PID regulatora za slučaj podešenja primjenom aproksimacije mrtvog vremena Taylorovim razvojem drugog reda.*

Na slici 8. Prikazani su usporedni odzivi PI i PID regulatora za slučaj podešenja primjenom aproksimacije mrtvog vremena pomoću prva tri člana Taylorovog razvoja (Taylorova aproksimacija drugog reda). Sukladno ranijim rezultatima, PID regulator ponovno daje zamjetno brži odziv uz nešto manji iznos nadvišenja u odnosu na PI regulator.

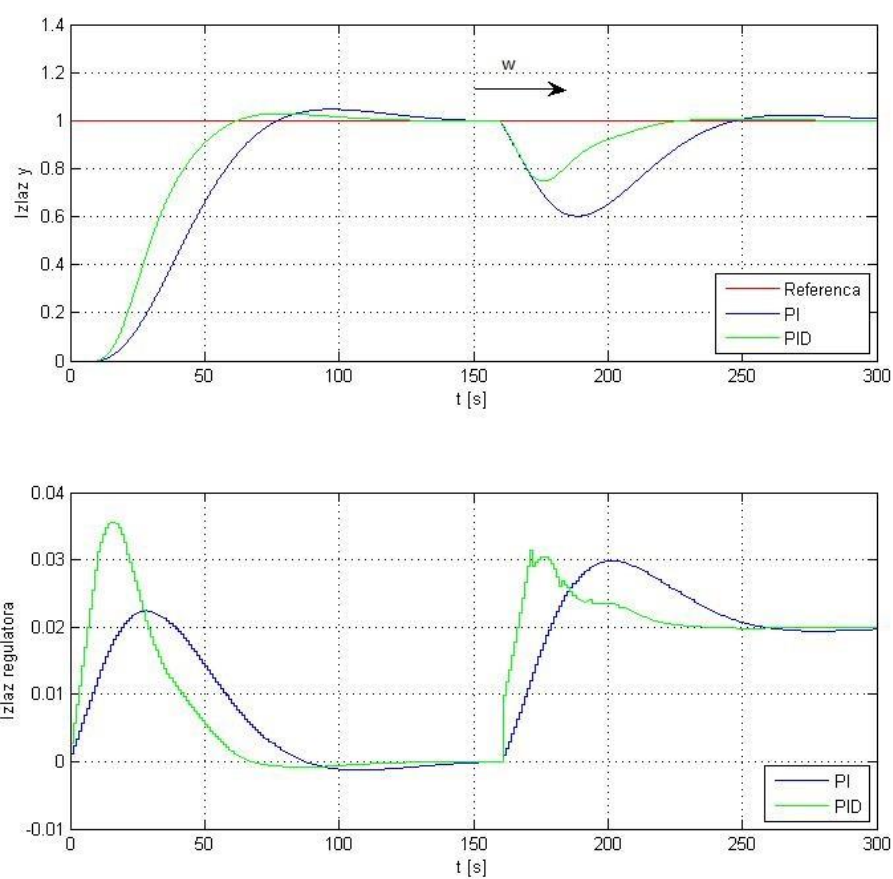


*Slika 9. Polovi PI i PID regulatora podešene uz aproksimaciju mrtvog vremena Taylorovim razvojem drugog reda*

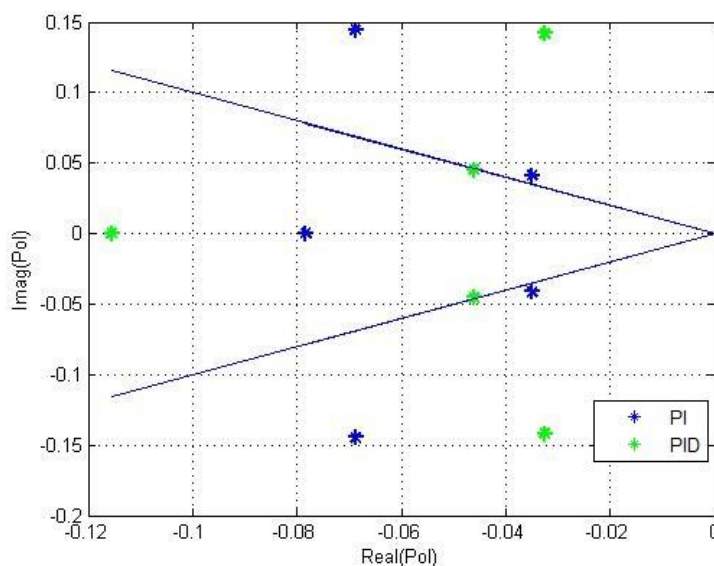
Rezultati na slici 9. prikazuju da se u slučaju aproksimacije mrtvog vremena pomoću Taylorovog razvoja 2. Reda pojavljuje dodatni pol prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga, a što se manifestira u dva para konjugirano-kompleksnih polova. Ovi polovi, kao i u predhodnom slučaju, su karakterizirani razmjerno dobrim iznosima faktora prigušenja. Nadalje, rezultati u tablici 8 pokazuju podešenje PID regulatora primjenom Taylorove aproksimacije mrtvog mrtvog vremena razvojem drugog reda rezultira još nižim iznosom nadvišenja i većom brzinom odziva u usporedbi s PI regulatorom, odnosno PID regulatorom za slučaj aproksimacije prvog reda. Prema tome, može se zaključiti da povećanje reda Taylorove aproksimacije člana s mrtvim vremenom uistinu može poboljšati performanse PID regulatora.

*Tablica 8. Karakteristike odziva PI i PID regulatora podešenih uz aproksimaciju mrtvog vremena Taylorovim razvojem drugog reda*

	PI	PID
$t_s$	74.2 s	58.7 s
$t_r$	77.4 s	62.5 s
$\sigma_n$	4.67%	2.85%
$t_{max}$	97.9 s	78 s



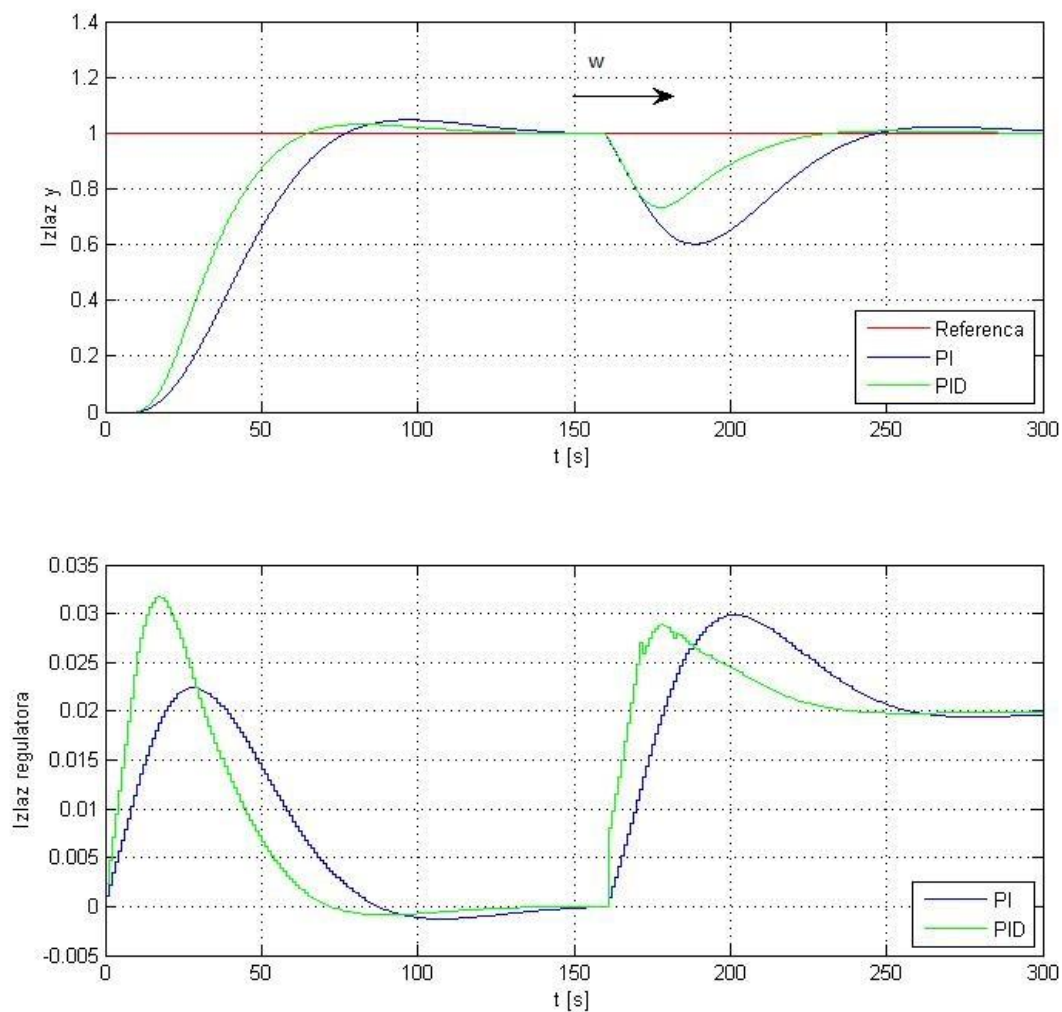
*Slika 10. Odzivi PI i PID regulatora slučaj podešenja primjenom aproksimacije mrtvog vremena Taylorovim razvojem trećeg reda*



*Slika 11. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran Taylorovim trećim redom.*

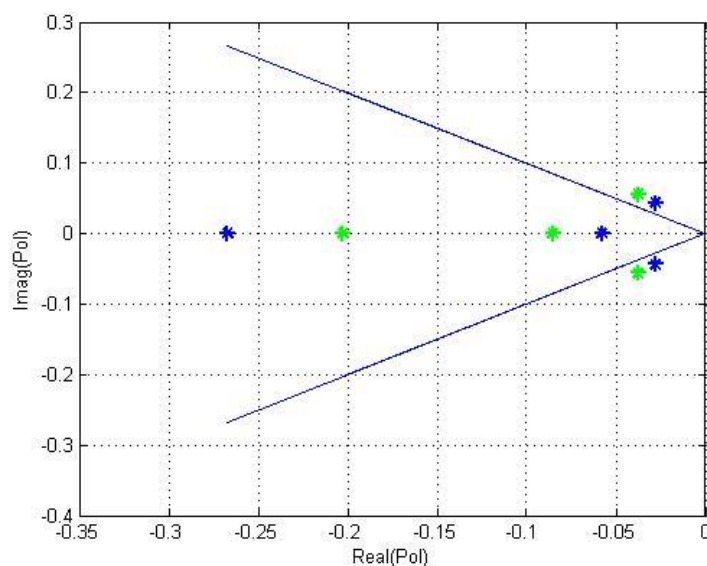
Rezultati dani na slikama 10 i 11 za slučaj kada se u postupku sinteze PI i PID regulatora koristi aproksimacija mrtvog vremena Taylorovim razvojem trećeg reda pokazuju da se daljnim povećanjem reda aproksimacije ne postiže bitno poboljšanje kvalitete odziva u smislu brže dinamike i smanjenja iznosa nadvišenja. Stoga nije uputno ići na Taylorovu aproksimaciju mrtvog vremena koja je višeg reda od drugog (ili eventualnog trećeg), jer se u postupku sinteze pojavljuju članovi višeg reda koje PI i PID regulatori sa svojim ograničenim stupnjevima slobode ionako ne mogu kvalitetno regulirati.

## 6.2 Aproximacija mrtvog vremena aperiodskim članom višeg reda



Slika 12. Odzivi PI i PID regulatora podešenih uz primjenu aproksimacije mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda



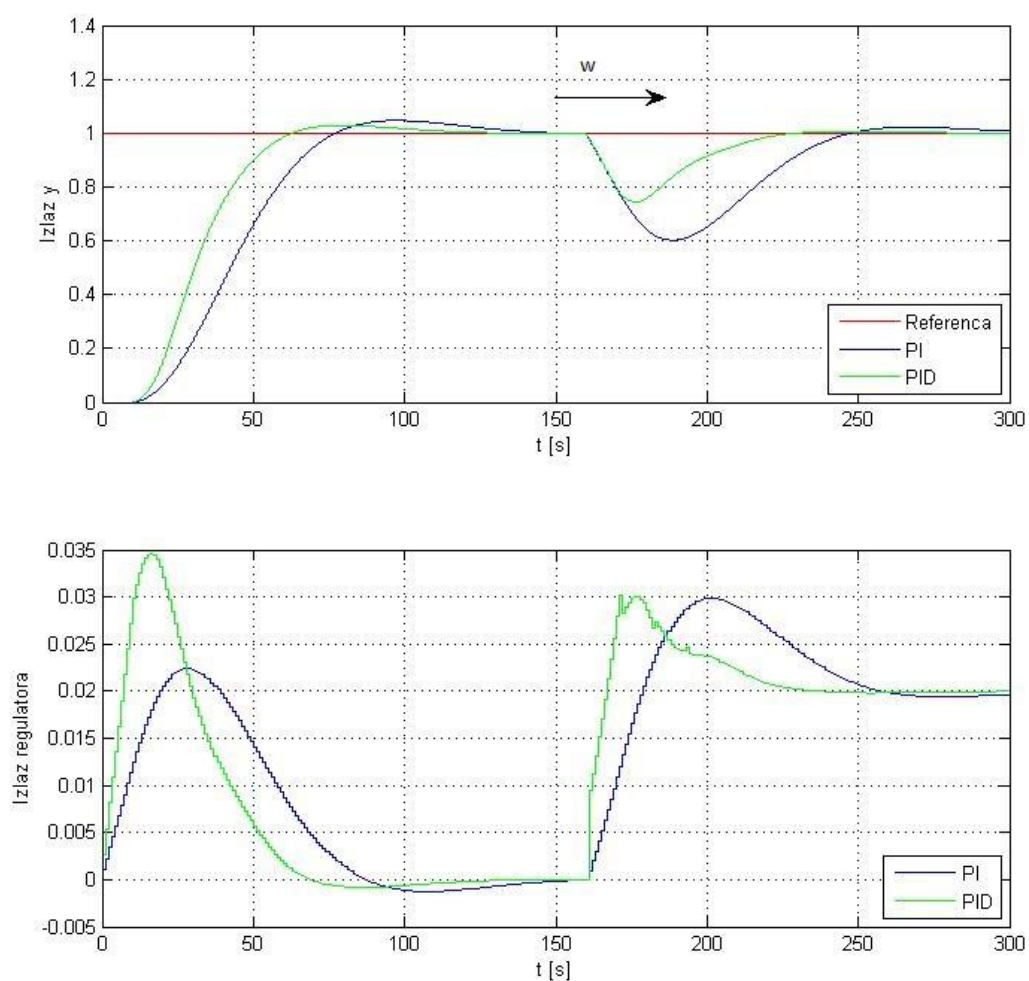


*Slika 13. Polovi sustava PI i PID regulatora podešeni uz primjenu aproksimacije mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda*

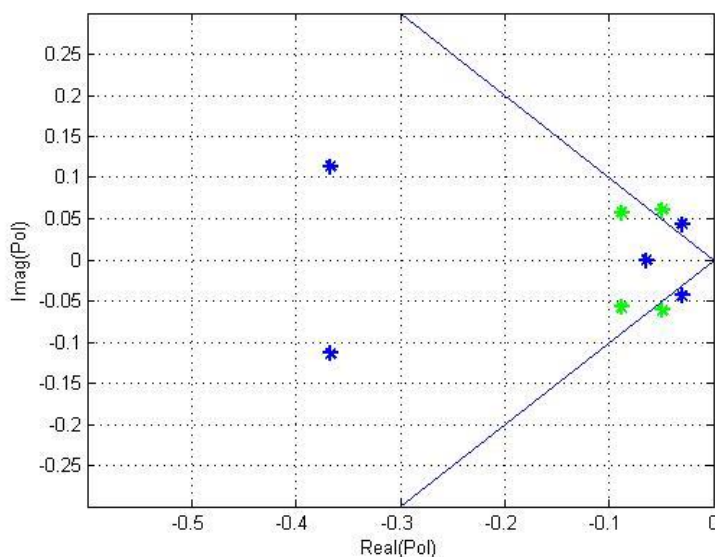
Rezultati simulacija prikazani na slici 12 pokazuju da se i u slučaju podešenja PI i PID regulatora korištenjem aproksimacije mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda postiže povoljan iznos prigušenja odziva. Također vidljivo je da PID regulator (kao regulator višeg reda, odnosno većeg broja stupnjeva slobode) može postići zamjetno brži odziv u odnosu na PI regulator, uz povoljan iznos nadvišenja, odnosno prigušenja odziva

*Tablica 9. Karakteristike odziva PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom drugog reda*

	PI	PID
$t_s$	74.2 s	61.4 s
$t_r$	77.4 s	65.2 s
$\sigma_n$	4.67%	3.08%
$t_{\max}$	97.9 s	82 s



Slika 14. Odzivi PI i PID regulatora za slučaj podešenja primjenom aproksimacije mrtvog vremena Taylorovim razvojem trećeg reda



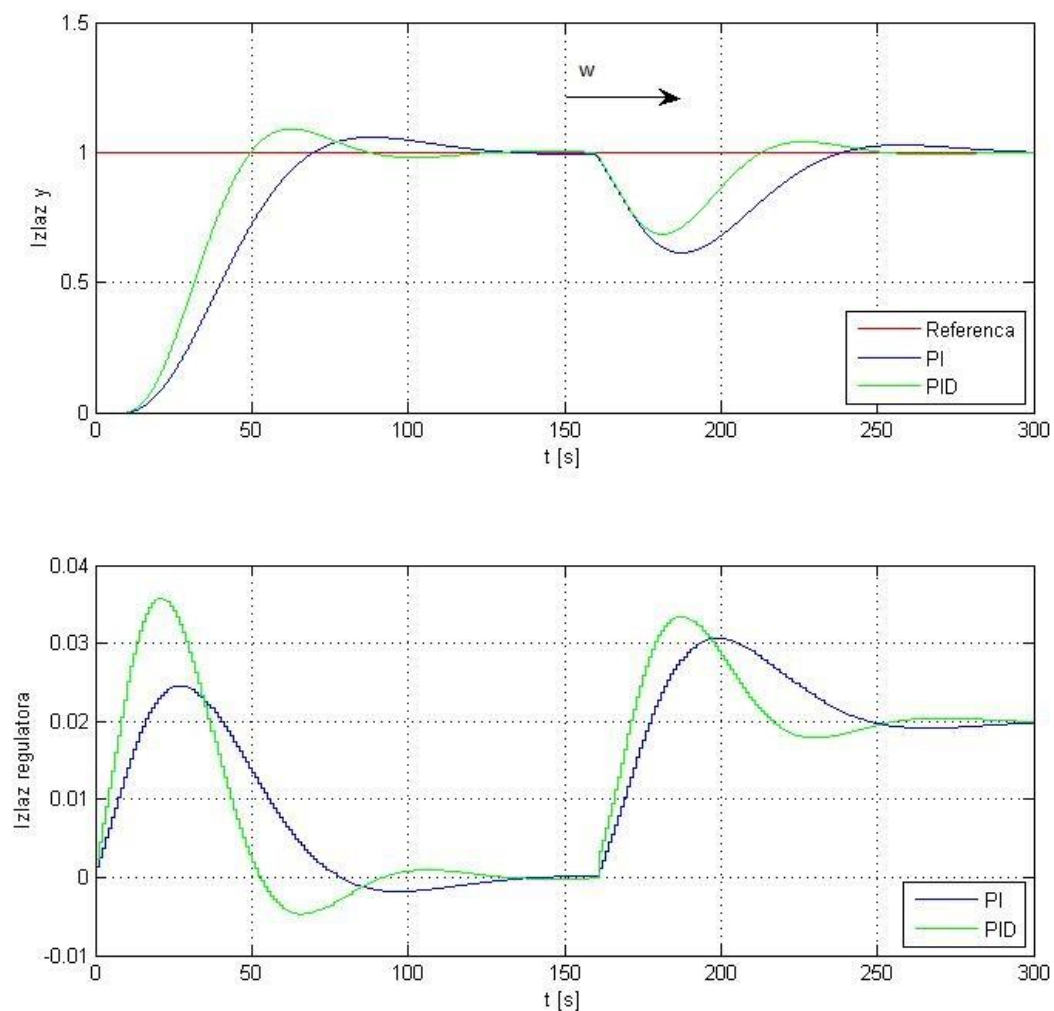
*Slika 15. Polovi PI i PID regulatora za nadomjesni model aproksimiran aperiodskim članom trećeg reda.*

Rezultati na slikama 14 i 15, te pokazatelji kvalitete dani u tablici 10 indiciraju da je primjenom aproksimacije mrtvog vremena pomoću aperiodskog modela trećeg reda moguće dodatno poboljšati performanse regulacijskog sustava s PID regulatorom. Konačan rezultat je vrlo sličan onome koji se dobije iz primjene aproksimacija člana mrtvog vremena Taylorovim razvojem više (drugog i trećeg reda). Stoga je moguće zaključiti da primjenom ovih dviju aproksimacija postižu slični rezultati ako se radi o aproksimaciji višeg reda.

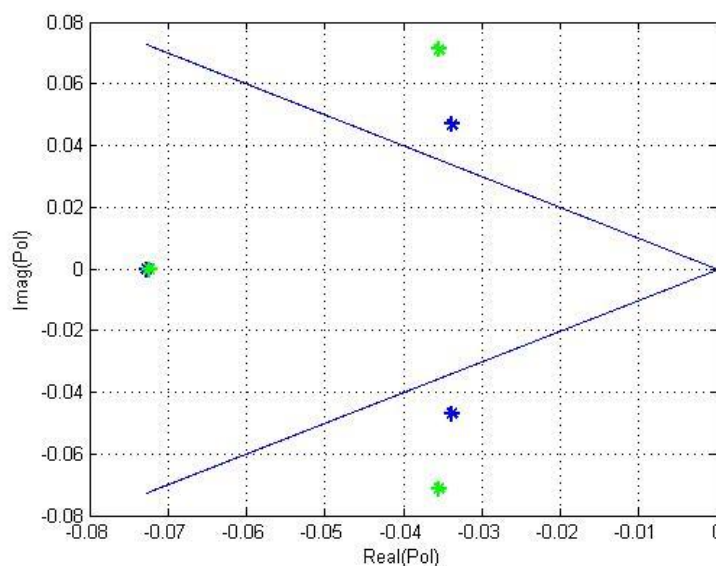
*Tablica 10. Pokazatelji kvalitete za slučaj kada je podešenje PI i PID regulatora temeljeno na primjeni aproksimacije mrtvog vremena aperiodskim članom trećeg reda*

	PI	PID
$t_s$	74.2 s	59.3 s
$t_r$	77.4 s	63 s
$\sigma_n$	4.67%	2.9%
$t_{\max}$	97.9 s	79 s

### 6.3 Primjena Padéove aproksimacije mrtvog vremena



Slika 16. Odzivi PI i PID regulatora podešenih uz primjenu Padéove aproksimacije mrtvog vremena



*Slika 17. Polovi PI i PID regulatora podešenih uz primjenu Padéove aproksimacije mrtvog vremena*

Rezultati na slici 16 i u tablici 11 indiciraju da se prethodno spomenuti „bolji“ pokazatelji kvalitete postižu u smislu kompromisa između brzine odziva i nadvišenja. Naime, primjena Padéove aproksimacije mrtvog vremena rezultira povoljnijom brzinom odziva na nešto veći iznos nadvišenja u odnosu na slučajeve aproksimacija zasnovanih na Taylorovom, odnosno aperiodskom članu višeg reda.

Ovo potvrđuju i položaji polova zatvorenog regulacijskog kruga (slika 17), a koji imaju tendenciju odmicanja od područja dobrog prigušenja. Moguće obrazloženje ovog efekta može biti vezano uz neminimalno-faznu narav Padéove aproksimacije mrtvog vremena (vidi poglavlje 5).

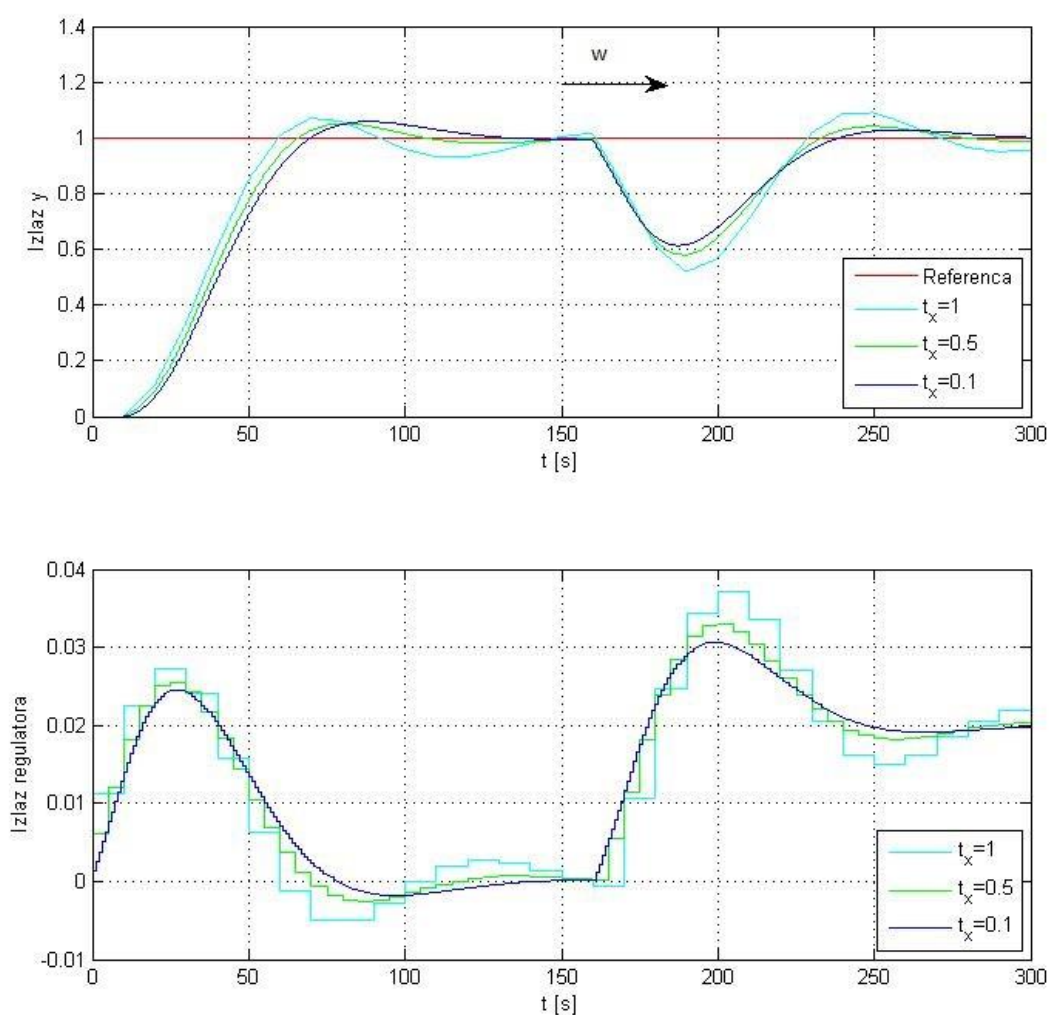
*Tablica 11. Pokazatelj kvalitete za slučaj PI i PID regulatora podešenih uz primjenu Padéove aproksimacije mrtvog vremena*

	PI	PID
$t_s$	67,6 s	48.5 s
$t_r$	70 s	49.7 s
$\sigma_n$	5.8%	9%
$t_{\max}$	88.8 s	63 s

## 6.4 Utjecaj vremena uzorkovanja $T_s$

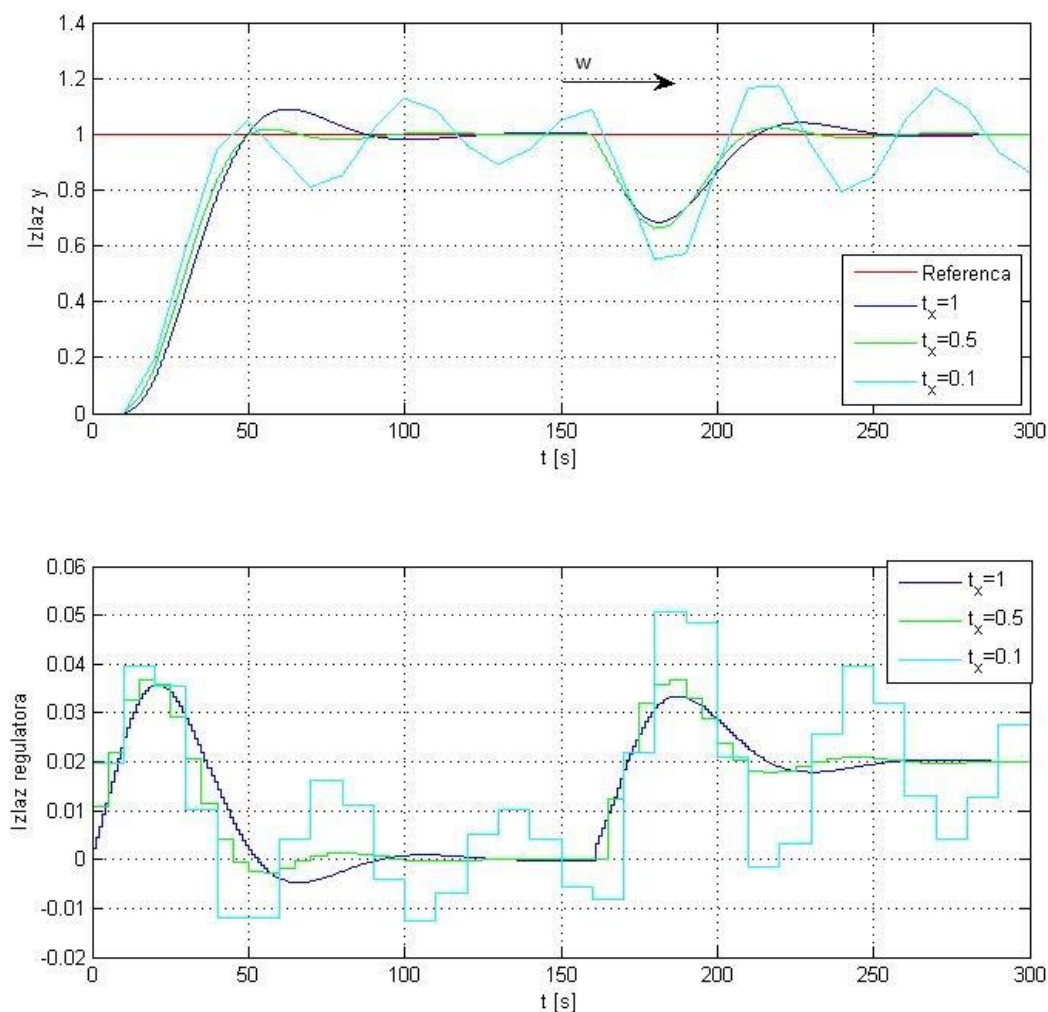
Za opis utjecaja vremena uzorkovanja koristi se nadomjesni model zasnovan na aproksimaciji Taylorovog drugog reda i na aproksimaciji Padéovog prvog reda za PI i PID regulatore.

Uvodimo varijablu  $t_x$  koja daje omjer između mrtvog vremena  $T_d$  i vremena uzorkovanja  $T_s$ .



Slika 18. Utjecaj vremena uzorkovanja za nadomjesni model zadan aproksimacijom Padéovog prvog reda za PI regulator

Na slici 18 vidimo da za koeficijent  $t_x=1$  PI regulator daje brži odziv na skokovitu promjenu referente veličine ali je regulator manje robusan i bolje osjetljiviji na udarne poremećaje. Za koeficijent  $t_x=0.5$  regulator daje malo brži odziv i manje nadvišenje ali je manje robusan i bolje osjetljiviji na udarne poremećaje.



Slika 19. Utjecaj vremena uzorkovanja za nadomjesni model zadan aproksimacijom Padéovog prvog reda za PID regulator

Na slici 19 za  $t_x=1$  PID regulator daje nestabilni odziv zbog prejakog derivacijskog djelovanja. Nasuprot tome za  $t_x=0.5$  PID regulator daje zanemarivo nadvišenje na skokovitu promjenu referente veličine uz očuvanu robusnost odziva (kao i u slučaju manjeg iznosa faktora  $t_x$ ).

## 7 Zaključak

U radu su razmotreni nadomjesni modeli mrtvog vremena, odnosno aproksimirane polinomskim funkcijama Taylorovog i Padéovog razvoja i aproksimacijom aperiodskog modela  $n$ -tog reda. Na temelju navedenih aproksimacija provedena je sinteza PI i PID regulatora primjenom kriterija optimuma dvostrukog odnosa koja jamči razmjerno povoljno prigušenje odziva na skokovitu promjenu referente veličine. Pritom se u sintezi PI regulatora korišteni optimalni iznosi karakterističnih odnosa  $D_i=0.5$ , dok je za PID regulator iznos nedominantnog karakterističnog odnosa  $D_{r+1}$  izabran različit (to jest manji) od 0.5. PID regulator u većini slučajeva daje brži i bolji odziv i udarne poremećaje. Prebačaji odziva u odnosu na referentnu veličinu su oko 6%. Kompleksnijim opisivanjem matematičkog modela od reda regulatora ( $r$ ) ne postiže se bitno poboljšanje kvalitete odziva regulacijskog kruga jer PI i PID regulatori mogu zbog ograničenog broja parametara modificirati samo do  $D_{r+1}$  karakterističnih odnosa. Za nadomjesne modele aproksimirane Taylorova razvoja i aproksimacija aperiodskog modela  $n$ -tog reda, PID regulator daje 15-20% brži odziv od PI regulatora, dok za nadomjesni model aproksimirane polinomom Padéovog razvoja, PID regulator daje 30% brži odziv.

Povećavanjem vremena uzorkovanja  $T_s$  za PI regulator smanjuje se robusnost regulatora odnosno povećava oscilatornost na udarne poremećaje. Za PID regulator moguće je da zbog velikog vremena uzorkovanja  $T_s$  u odnosu na mrtvo vrijeme  $T_d$  sustav postaje rubno nestabilan zbog dodatnog stupnja slobode u podešavanju, a koji nudi veću brzinu sustava. U uvjetima velikih odstupanja od nominalne dinamike (kao u slučaju velikih iznosa vremena uzorkovanja) ovo može biti otežavajući faktor jer brži regulator ima veću tendenciju dovođenja regulacijskog kruga bliže rubu stabilnosti. S druge strane uzimanjem premalenog vremena uzorkovanja, nadvišenja sustava mogu postati veća. Stoga se teži kompromisu koji će jamčiti dobra prigušenja uz zadovoljavajuću brzinu odziva.

Nastavak rada na ovoj tematici može uključiti postupke numeričkog optimiranja parametara regulatora, odnosno izravni postupak sinteze u vremenski-diskretnom području. Na taj način bi bilo moguće točnije opisati dinamiku objekta upravljanja iz perspektive digitalnog regulatora, uz istodobno postizanje većeg stupnja fleksibilnosti u podešavanju dinamike regulacijskog sustava.



## 8 Literatura

- [1] Z. Vukić; Lj. Kuljača (2004): *Automatsko upravljanje –analiza linearnih sustava*. Zagreb: Kigen d.o.o.
- [2] Danijel Pavković ; Siniša Polak ; Davor Zorc :*PID controller auto-tuning based on process step response and damping optimum criterion*
- [3] [http://www.ieee.hr/download/repository/UEMP\\_pred\\_15.pdf](http://www.ieee.hr/download/repository/UEMP_pred_15.pdf), (23.02.2014)
- [4] Tugomir Šurina: *Automatska regulacija , Školska knjiga, Zagreb 1990*

## 9 Prilozi

### Sinteza PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog prvog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1.0; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D2/D3;
% Parametri regulatora
TI = Te;
KR = 1/D2/Te/Kp;
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1, '\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1, '\n\t KR = %f \n', KR);
fprintf(1, '\n\t TI = %f \n', TI);
fprintf(1, '\n\t TD = %f \n', TD);
fprintf(1, '\n\t Ts = %f \n\n', Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI/(KR*Kp);
ac1 = TI;
den = [ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1), plot(real(po), imag(po), 'b*', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid
on, hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1), line([0 min_po], [0 min_po])
figure(1), line([0 min_po], [0 -min_po])
xlabel('Real (Pol) '), ylabel('Imag (Pol) '),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211), plot(t, yR, 'r'), grid on, hold on
plot(t, y, 'b'), legend('Referenca', 'Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'), xlabel('t [s]')
subplot(212), stairs(t, u, 'b'), grid on, hold on
ylabel('Izlaz regulatora'), xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog prvog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1.0; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4=0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta proizvoljno izabrana:
Te = 34;
% Parametri regulatora
TI = Te;
KR = Td_s/Kp/D3/(D2^2)/Te^2;
TD = D2*Te-1/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR/Kp + TD);
ac1 = TI;
den = [ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real (Pol) '),ylabel('Imag (Pol) '),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'g'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'g'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PI regulator za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog drugog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 10; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5;
D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D2/D3;
%Parametri regulatora
TI = Te;
KR = 1/D2/Te/Kp;
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1, '\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1, '\n\t KR = %f \n', KR);
fprintf(1, '\n\t TI = %f \n', TI);
fprintf(1, '\n\t TD = %f \n', TD);
fprintf(1, '\n\t Ts = %f \n\n', Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac4 = TI*Td_s^2/(KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI/(KR*Kp);
ac1 = TI;
den = [ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1), plot(real(po), imag(po), 'b*', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid
on, hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1), line([0 min_po], [0 min_po])
figure(1), line([0 min_po], [0 -min_po])
xlabel('Real (Pol)'), ylabel('Imag (Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211), plot(t, yR, 'r'), grid on, hold on
plot(t, y, 'b'), legend('Referenca', 'Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'), xlabel('t [s]')
subplot(212), stairs(t, u, 'b'), grid on, hold on
ylabel('Izlaz regulatora'), xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog drugog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4=0.7;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D4/D3/D2/2;
TI = Te;
KR = Td_s/Kp/D3/D2^2/Te^2;
TD = D2*Te-1/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac4 = TI*Td_s^2/(2*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR/Kp+TD);
ac1 = TI;
den = [ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real (Pol) '),ylabel('Imag (Pol) '),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'g'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'g'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog trećeg reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D2/D3;
%Parametri regulatora
TI = Te;
KR = 1/D2/Te/Kp;
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1, '\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1, '\n\t KR = %f \n', KR);
fprintf(1, '\n\t TI = %f \n', TI);
fprintf(1, '\n\t TD = %f \n', TD);
fprintf(1, '\n\t Ts = %f \n\n', Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac5 = TI*Td_s^3/(6*KR*Kp);
ac4 = TI*Td_s^2/(2*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI/(KR*Kp);
ac1 = TI;
den = [ac5 ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1), plot(real(po), imag(po), 'b*', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid
on, hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1), line([0 min_po], [0 min_po])
figure(1), line([0 min_po], [0 -min_po])
xlabel('Real (Pol)'), ylabel('Imag (Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211), plot(t, yR, 'r'), grid on, hold on
plot(t, y, 'b'), legend('Referenca', 'Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'), xlabel('t [s]')
subplot(212), stairs(t, u, 'b'), grid on, hold on
ylabel('Izlaz regulatora'), xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Taylorovog trećeg reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 10; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4=0.7;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/2/D4/D3/D2;
%Parametri regulatora:
TI = Te;
KR = Td_s/Kp/D3/D2^2/Te^2;
TD = D2*Te-1/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac5 = TI*Td_s^3/(6*KR*Kp);
ac4 = TI*Td_s^2/(2*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR*Kp+TD);
ac1 = TI;
den = [ac5 ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real(Pol)'),ylabel('Imag(Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'b'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'g'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Padéovog prvog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = 34;
% solve('D2^2*D3*Te^3-1/2*D2*Td_s*Te^2-1/2*Td_s^2*Te-1/8*Td_s^3','Te')
% realni pozirivni broj se uzima u obzir
% Parametri regulatora
TI = Te+Td_s/2;
KR = TI/Kp/(D2*Te^2+TI*Td_s/2);
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac3 = TI*Td_s/(2*KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR/Kp-Td_s/2);
ac1 = TI-Td_s/2;
den = [ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'b*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real(Pol)'),ylabel('Imag(Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),%plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'b'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'b'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```



## Sinteza PID regulator za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji Padéovog prvog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 5.0; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4=0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta (proizvoljno)
Te =25;
%Parametri regulatora
TI = Te+Td_s/2;
KR = 3/2*1/Kp*1/(D2^2*D3*Te^3/TI/Td_s+D2*Te^2/TI+Td_s/2);
TD = D2*Te^2/TI+Td_s/2-1/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac3 = TI*Td_s/2*(1/KR/Kp-TD);
ac2 = TI*(TD-Td_s/2+1/KR/Kp);
ac1 = TI-Td_s/2;
den = [ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real (Pol) '),ylabel('Imag (Pol) '),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'b'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'c'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1.0; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D2/D3;
% Parametri regulatora
TI = Te;
KR = 1/D2/Te/Kp;
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1, '\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1, '\n\t KR = %f \n', KR);
fprintf(1, '\n\t TI = %f \n', TI);
fprintf(1, '\n\t TD = %f \n', TD);
fprintf(1, '\n\t Ts = %f \n\n', Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinični (nema nula)
% Nazivnik:
ac4 = TI*Td_s^2/(4*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI/(KR*Kp);
ac1 = TI;
den = [ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1), plot(real(po), imag(po), 'b*', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid
on, hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1), line([0 min_po], [0 min_po])
figure(1), line([0 min_po], [0 -min_po])
xlabel('Real (Pol)'), ylabel('Imag (Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211), plot(t, yR, 'r'), grid on, hold on
plot(t, y, 'b'), legend('Referenca', 'Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'), xlabel('t [s]')
subplot(212), stairs(t, u, 'b'), grid on, hold on
ylabel('Izlaz regulatora'), xlabel('t [s]')
```

## Sinteza PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom drugog reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4=0.33;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D4/D3/D2/4;
%Oaranetri regulatora
TI = Te;
KR = Td_s/Kp/D3/D2^2/Te^2;
TD=(Td_s/(D2*D3*Te)-1)/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac4 = TI*Td_s^2/(4*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR/Kp+TD);
ac1 = TI;
den = [ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real (Pol)'),ylabel('Imag (Pol)'),
Tfin =300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'g'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'g'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

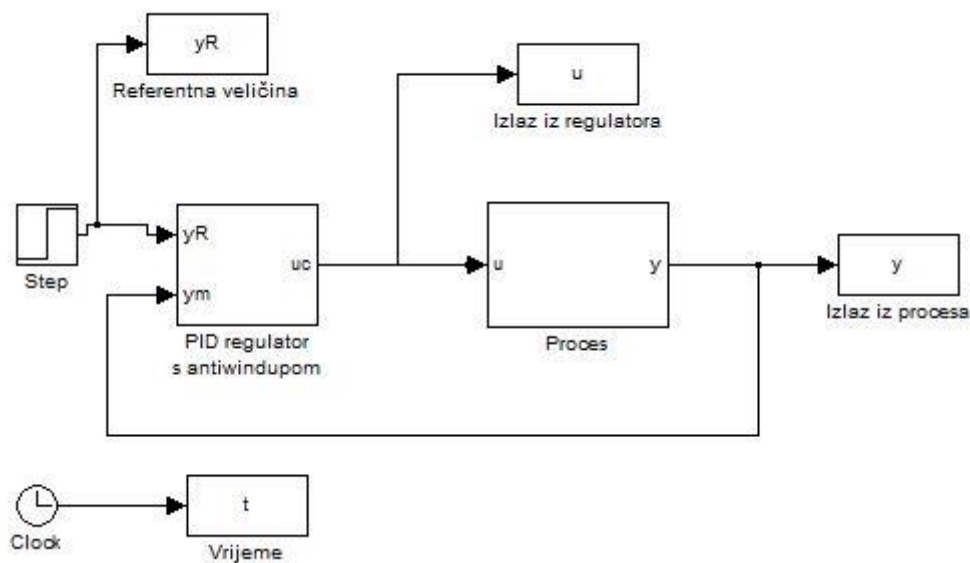
## Sinteza PI regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom trećeg reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PI regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 1.0; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T/2 se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts/2;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5;
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/D2/D3;
% Parametri regulatora
TI = Te;
KR = 1/D2/Te/Kp;
TD = 0.0; % Nema derivacijskog djelovanja u PI regulatoru
fprintf(1, '\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1, '\n\t KR = %f \n', KR);
fprintf(1, '\n\t TI = %f \n', TI);
fprintf(1, '\n\t TD = %f \n', TD);
fprintf(1, '\n\t Ts = %f \n\n', Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac5 = TI*Td_s^3/(27*KR*Kp);
ac4 = TI*Td_s^2/(3*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI/(KR*Kp);
ac1 = TI;
den = [ac5 ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1), plot(real(po), imag(po), 'b*', 'LineWidth', 2, 'MarkerSize', 8), grid
on, hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1), line([0 min_po], [0 min_po])
figure(1), line([0 min_po], [0 -min_po])
xlabel('Real(Pol)'), ylabel('Imag(Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211), plot(t, yR, 'r'), grid on, hold on
plot(t, y, 'b'), legend('Referenca', 'Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'), xlabel('t [s]')
subplot(212), stairs(t, u, 'b'), grid on, hold on
ylabel('Izlaz regulatora'), xlabel('t [s]')
```

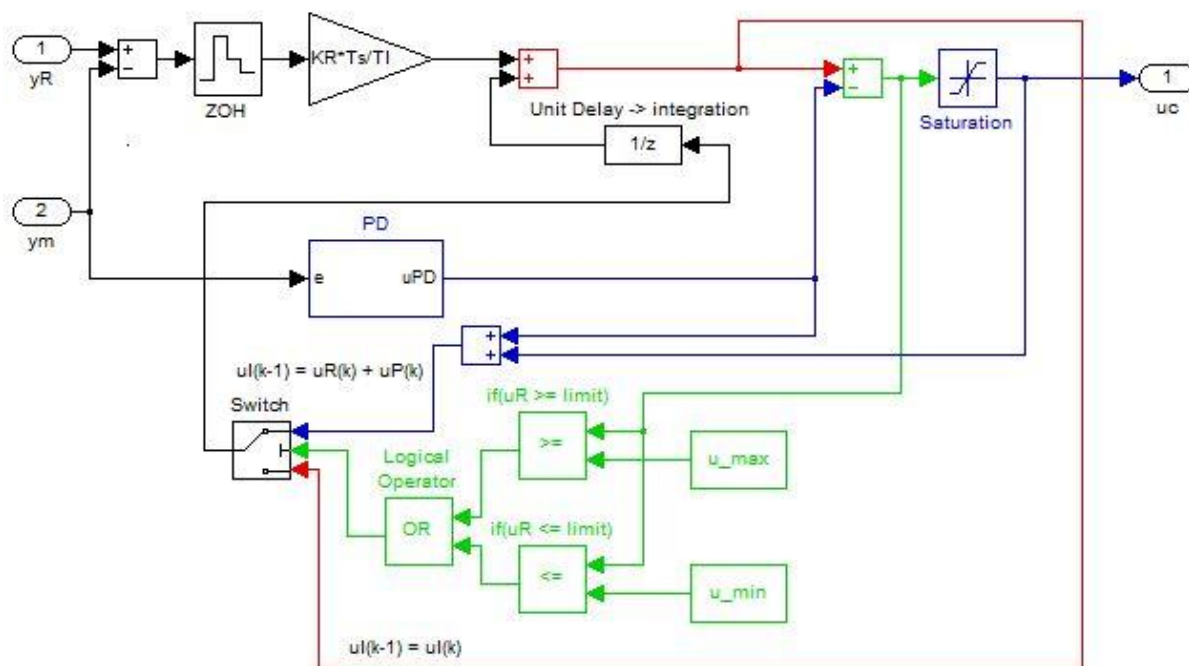
## Sinteza PID regulatora za nadomjesni model procesa zasnovan na aproksimaciji mrtvog vremena aperiodskim članom trećeg reda

```
% Mrtvo vrijeme
Td = 10; % [s]
% Pojacanje integracijskog procesa
Kp = 1.0; % [1/s]
% Vremenski-diskretni PID regulator: vrijeme uzorkovanja
Ts = 10; % [s]
% Utjecaj uzorkovanja Tpar = T se pridjeljuje mrtvom vremenu.
Td_s = Td + Ts;
% Postupak sinteze prema optimumu dvostrukog odnosa
D2 = 0.5; D3 = 0.5; D4 = 0.46;%izobičenje
% Nadomjesna vremenska konstanta
Te = Td_s/3/D4/D3/D2;
% Parametri regulatora
TI = Te;
KR = Td_s/Kp/D3/D2^2/Te^2;
TD = D2*Te-1/KR/Kp;
fprintf(1,'\n Parametri regulatora: \n');
fprintf(1,'\n\t KR = %f \n',KR);
fprintf(1,'\n\t TI = %f \n',TI);
fprintf(1,'\n\t TD = %f \n',TD);
fprintf(1,'\n\t Ts = %f \n\n',Ts);
% Limiti izlazne velicine:
u_max = 10.0;
u_min = -10.0;
% Root-locus za razmatrani regulacijski krug
% Brojnik prijenosne funkcije je jedinичni (nema nula)
% Nazivnik:
ac5 = TI*Td_s/(9*KR*Kp);
ac4 = TI*Td_s^2/(3*KR*Kp);
ac3 = TI*Td_s/(KR*Kp);
ac2 = TI*(1/KR*Kp+TD);
ac1 = TI;
den = [ac5 ac4 ac3 ac2 ac1 1];
% Polovi (korijeni nazivnika)
po = roots(den);
min_po = min(real(po));
figure(1),plot(real(po),imag(po),'g*','LineWidth',2,'MarkerSize',8),grid
on,hold on
% Crtanje granice dobre prigusenosti (pravci s kutevima 45° u odnosu na
realnu os
figure(1),line([0 min_po],[0 min_po])
figure(1),line([0 min_po],[0 -min_po])
xlabel('Real (Pol)'),ylabel('Imag (Pol)'),
Tfin = 300;
Tstore = 0.01*Ts;
linear_system;
sim('linear_system');
figure(2),
subplot(211),plot(t,yR,'r'),grid on,hold on
plot(t,y,'g'),legend('Referenca','Izlaz procesa')
ylabel('Izlaz y'),xlabel('t [s]')
subplot(212),stairs(t,u,'g'),grid on,hold on
ylabel('Izlaz regulatora'),xlabel('t [s]')
```

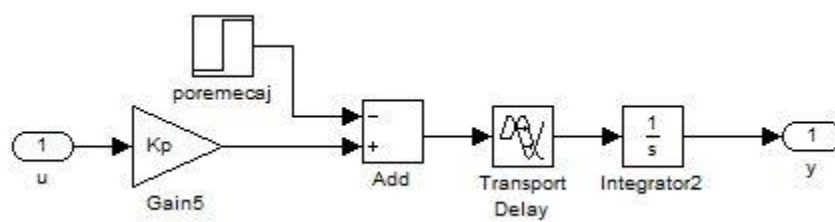
## Simulink modeli



*Simulink model upravljačkog kruga*



*Simulink model diskretnog I+PD regulatora sa antiwindupom*



*Simulink model procesa sa izraženim mrtvim vremenom i integracijskim djelovanjem*